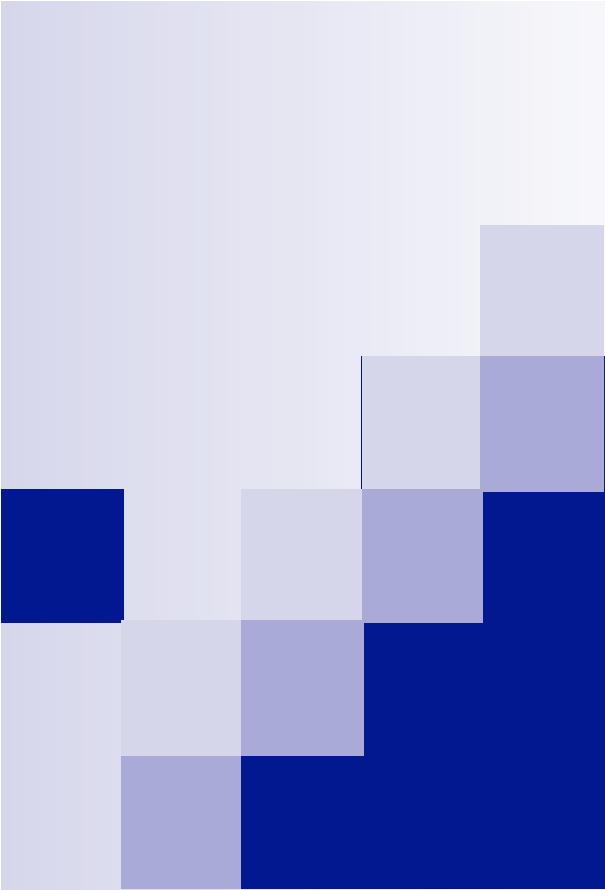
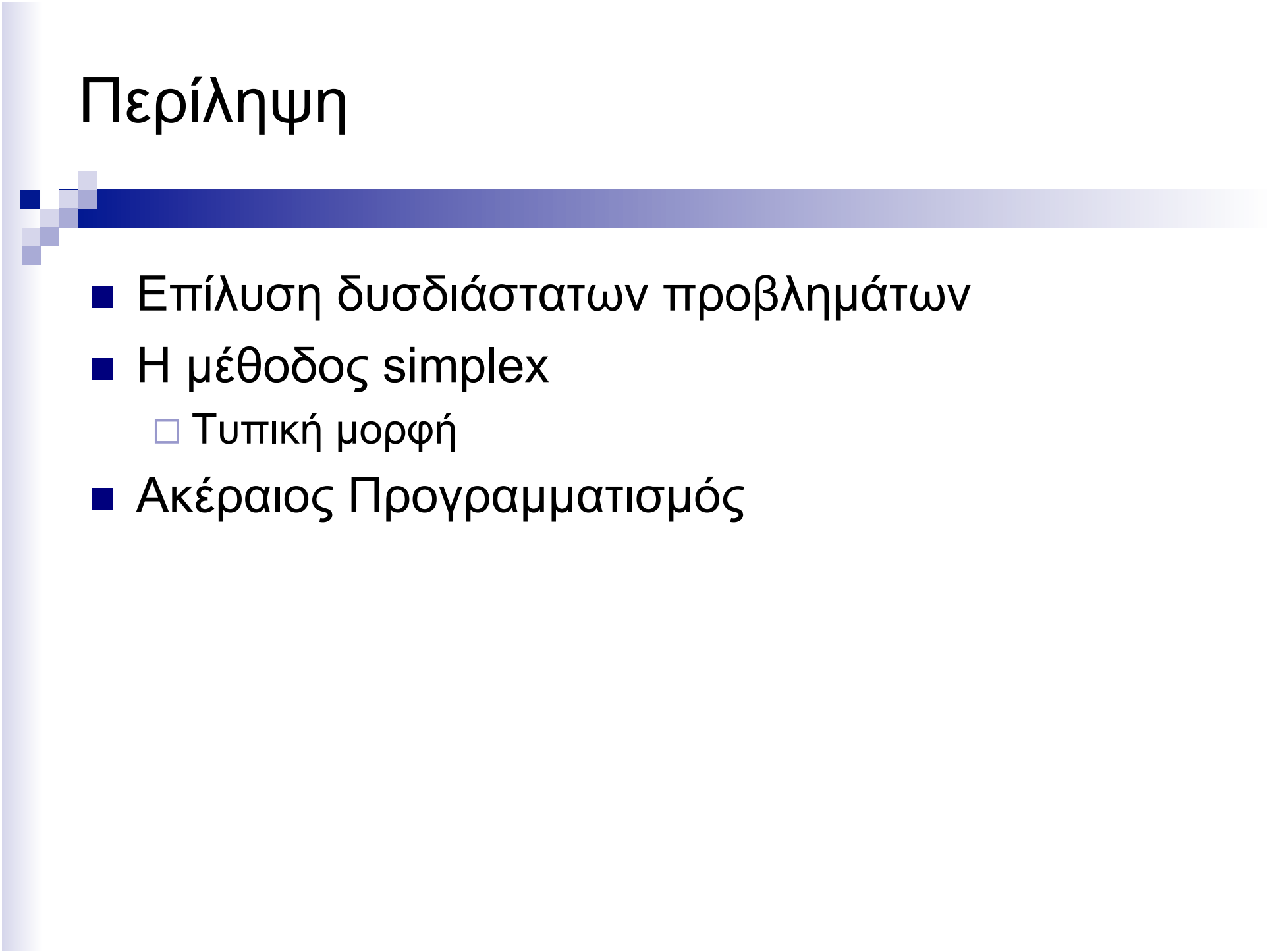




Γραμμικός Προγραμματισμός (ΓΠ)

Περίληψη



- Επίλυση δυσδιάστατων προβλημάτων
- Η μέθοδος simplex
 - Τυπική μορφή
- Ακέραιος Προγραμματισμός

Προγραμματισμός Παραγωγής

	Προϊόν 1	Προϊόν 2	Παραγωγική Δυνατότητα
Μηχ. 1	1	0	4
Μηχ. 2	0	2	12
Μηχ. 3	3	2	18
Κέρδος	\$3,000	\$5,000	

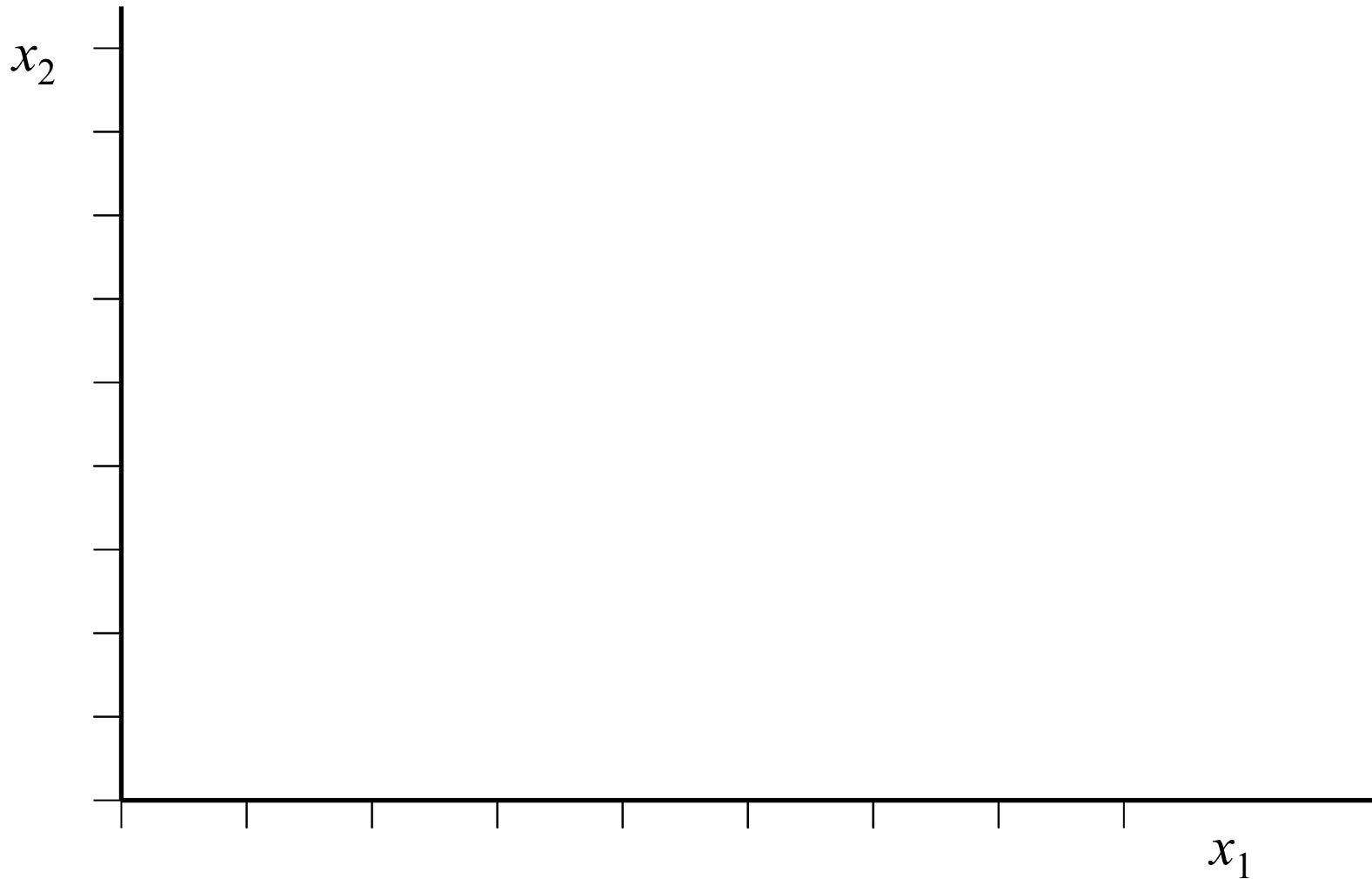
Ερώτημα: Πιο το πρόγραμμα παραγωγής των προϊόντων 1 και 2 έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος της εταιρείας;

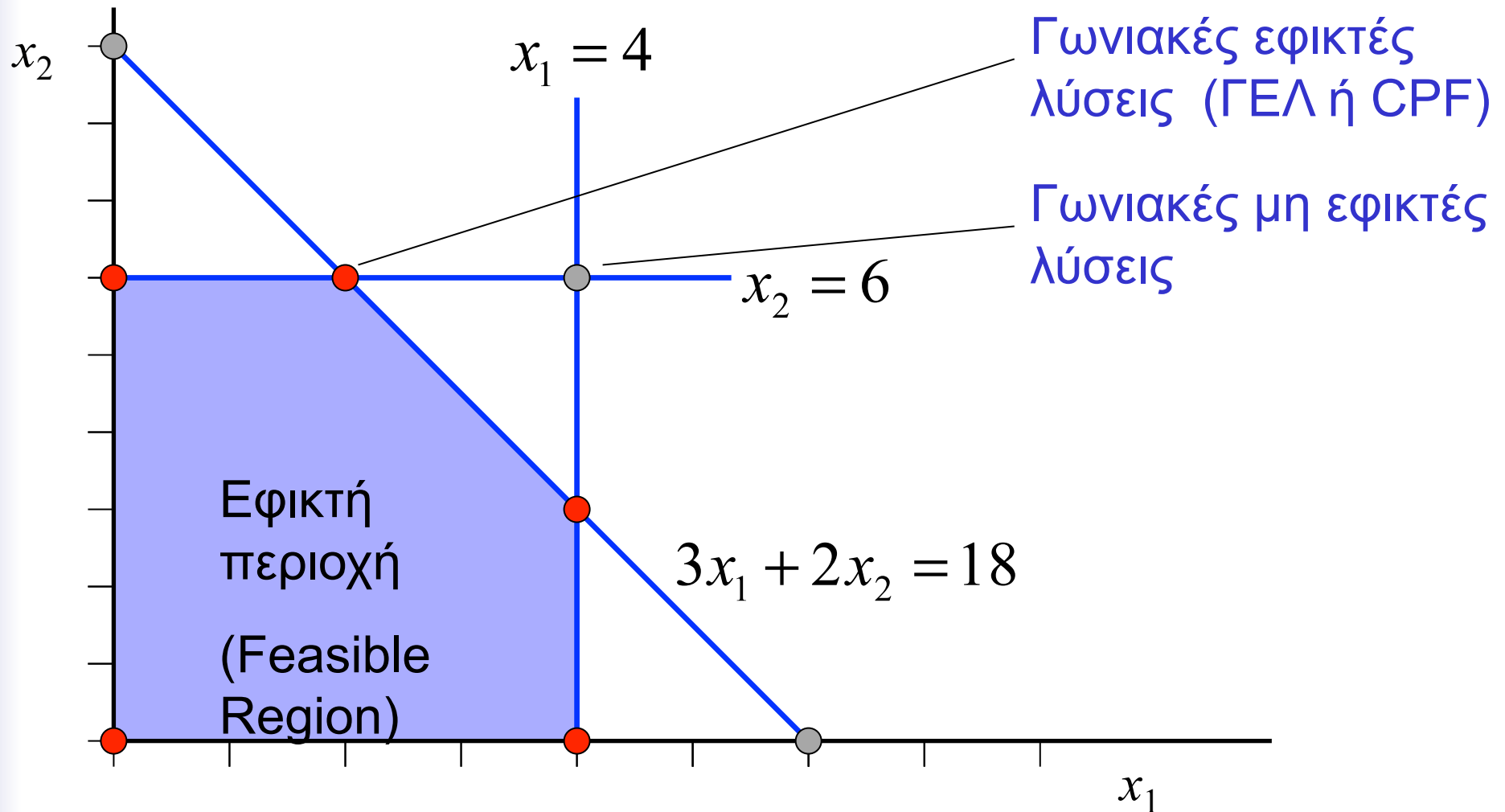
Προγραμματισμός Παραγωγής: Διατύπωση

x_1 : μονάδες εβδομαδιαίας παραγωγής του προϊόντος 1

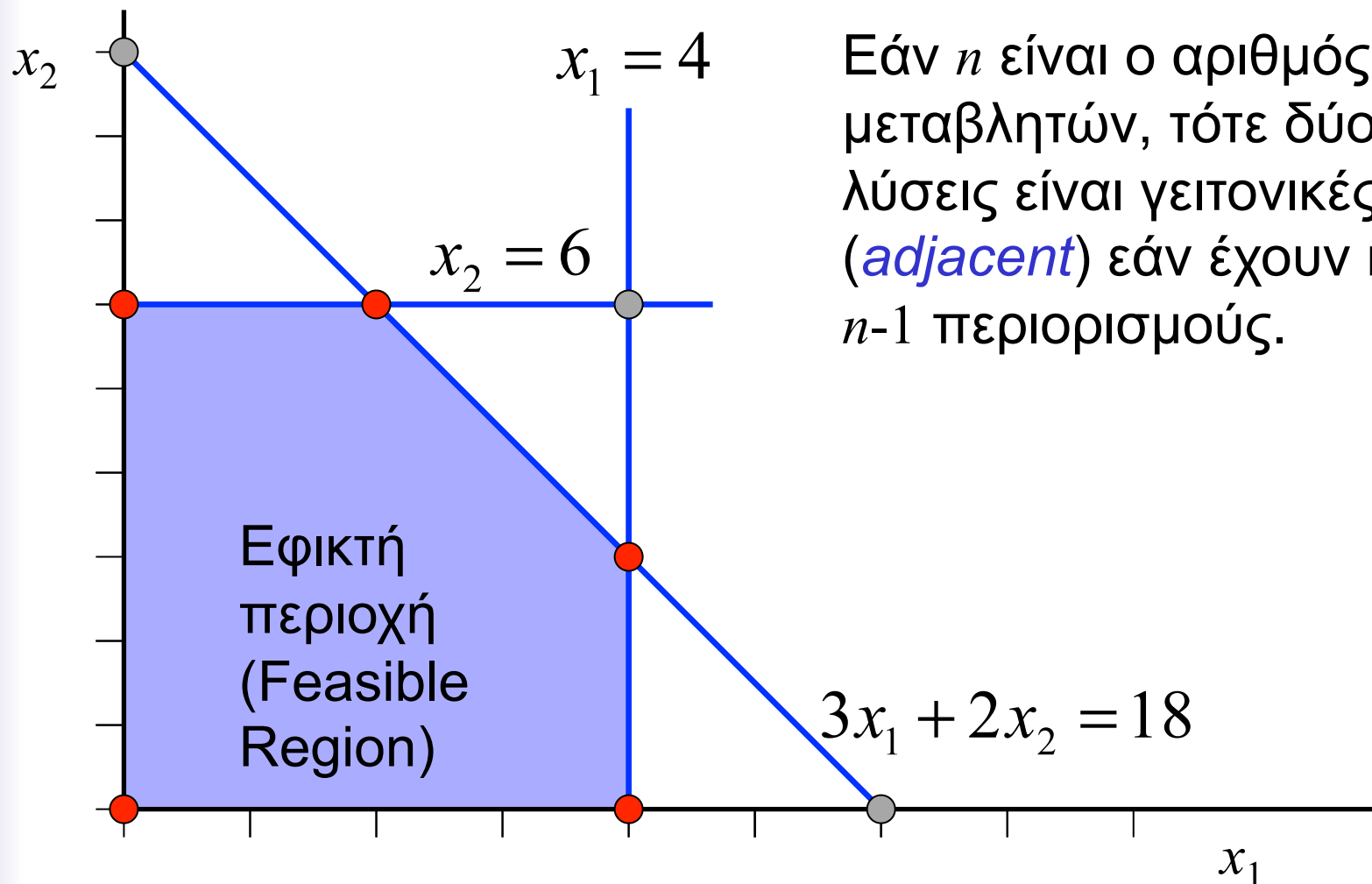
x_2 : μονάδες εβδομαδιαίας παραγωγής του προϊόντος 2

Προγραμματισμός Παραγωγής: Γραφική Λύση





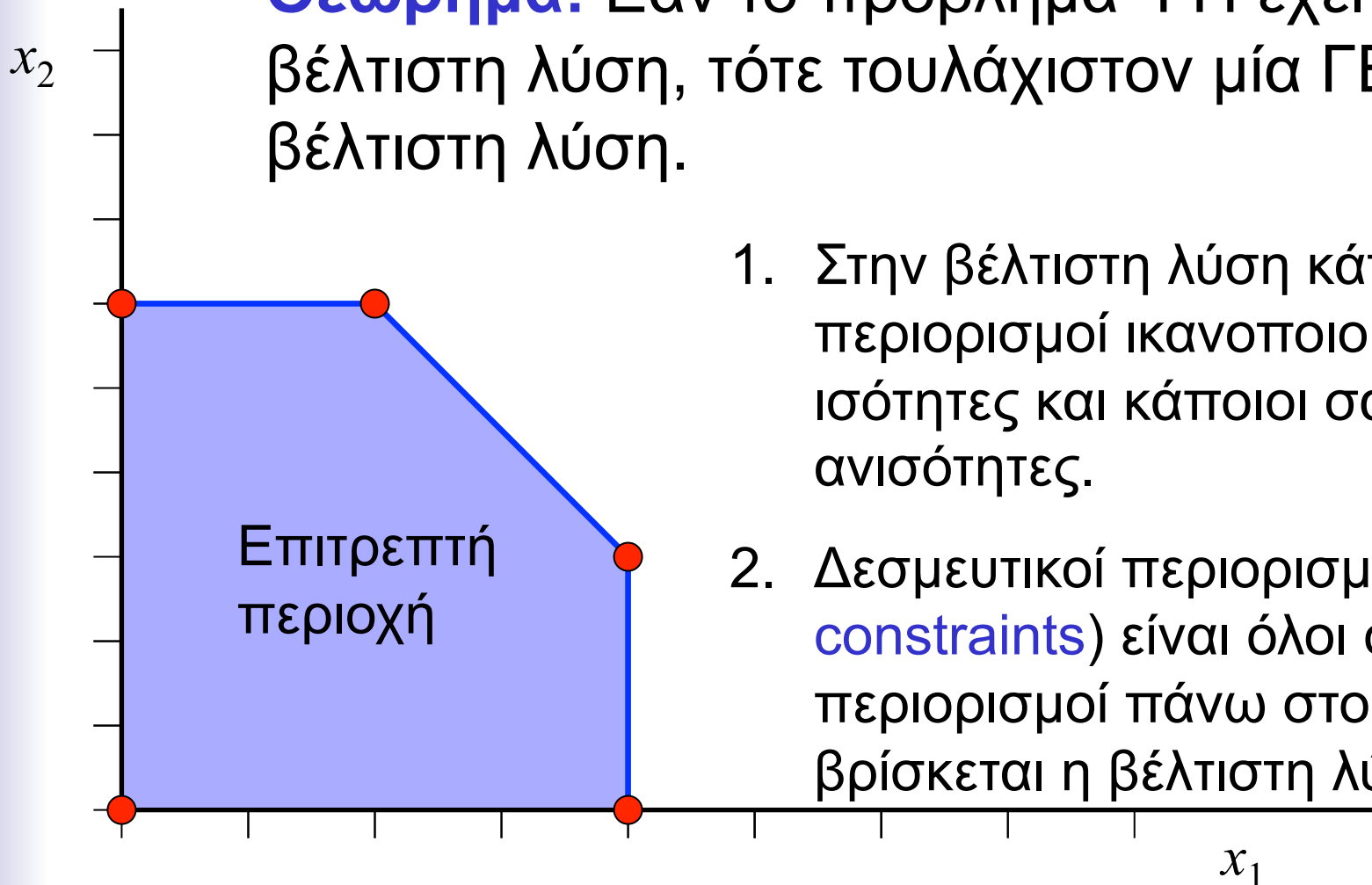
Γειτονικές Γωνιακές Λύσεις (Adjacent Corner-Point Solutions)



Εάν n είναι ο αριθμός των μεταβλητών, τότε δύο CPF λύσεις είναι γειτονικές (*adjacent*) εάν έχουν κοινούς $n-1$ περιορισμούς.

Γωνιακές Εφικτές Λύσεις (ΓΕΛ)

Θεώρημα: Εάν το πρόβλημα ΓΠ έχει βέλτιστη λύση, τότε τουλάχιστον μία ΓΕΛ είναι βέλτιστη λύση.



1. Στην βέλτιστη λύση κάποιοι περιορισμοί ικανοποιούνται σαν ισότητες και κάποιοι σαν ανισότητες.
2. Δεσμευτικοί περιορισμοί (**binding constraints**) είναι όλοι οι περιορισμοί πάνω στους οποίους βρίσκεται η βέλτιστη λύση.

Συνθήκη βέλτιστης τιμής (Optimality test)



Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα ΓΠ έχει τουλάχιστον μία βέλτιστη λύση.

Εάν μία ΓΕΛ δεν έχει γειτονική ΓΕΛ όπου η αντικειμενική συνάρτηση να παίρνει καλύτερη τιμή, τότε αυτή η λύση είναι βέλτιστη λύση.

Η Μέθοδος Simplex

■ Αλγόριθμος επίλυσης προβλημάτων ΓΠ

- Η μέθοδος υποθέτει ότι το πρόβλημα είναι διατυπωμένο στην τυπική του μορφή (standard form).

$$\text{Maximize } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Subject to the constraints

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

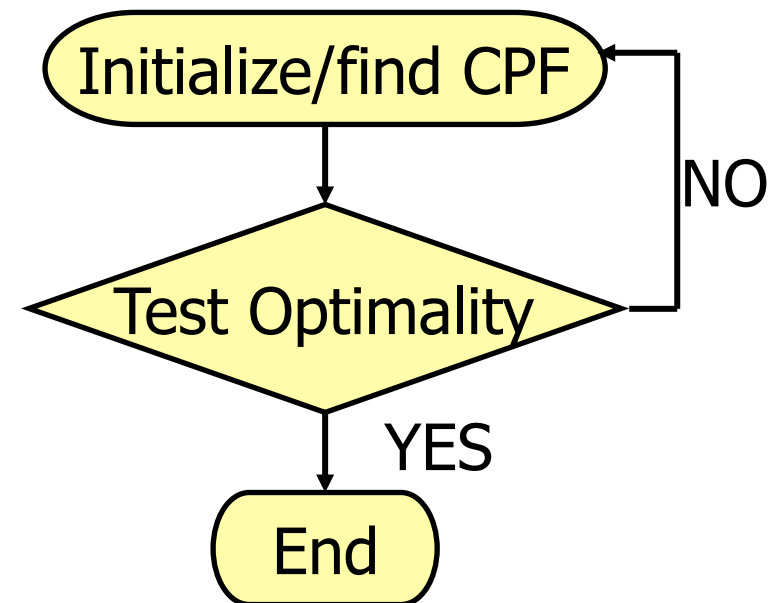
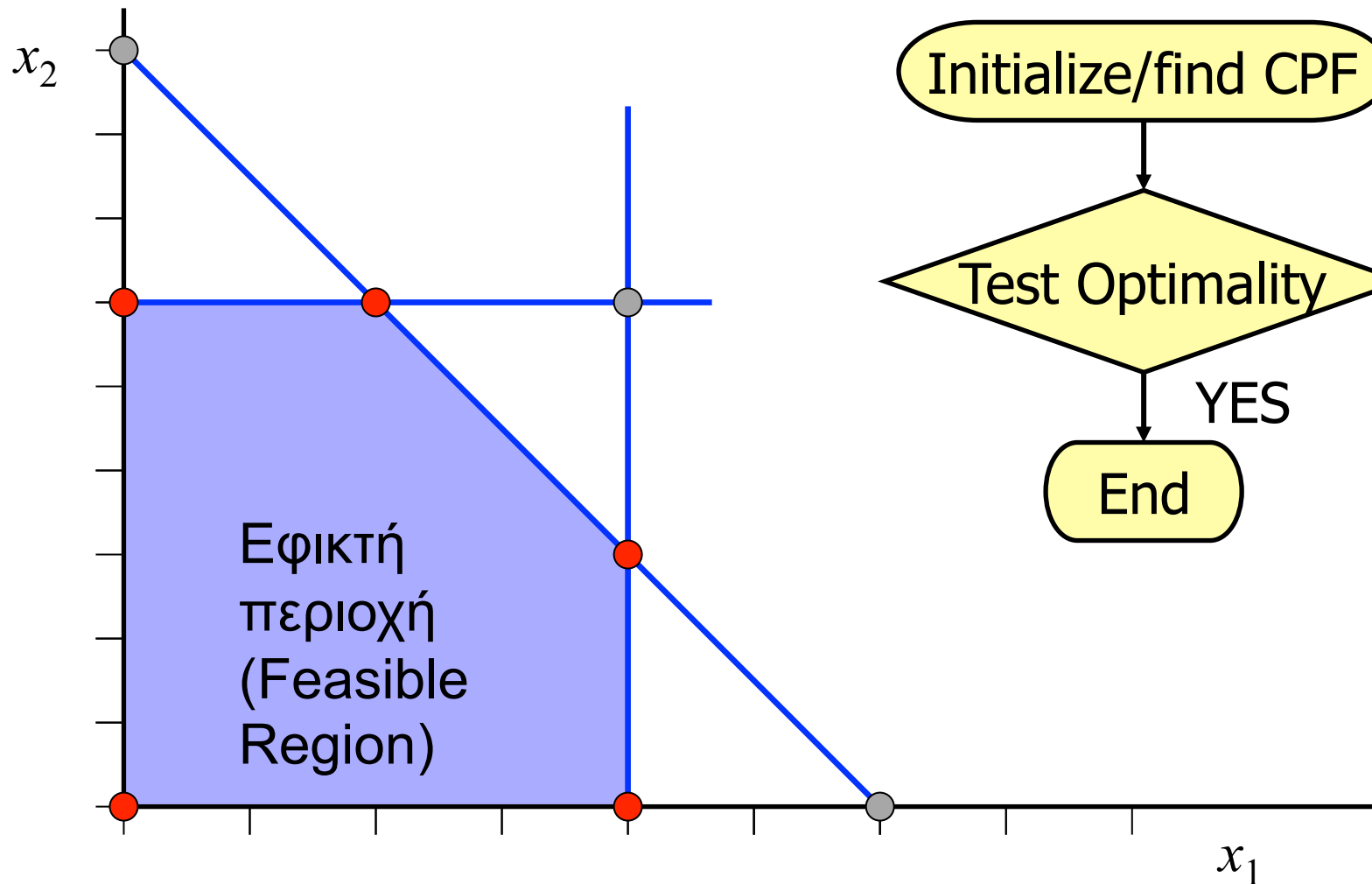
and

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

Η μέθοδος Simplex

- Η μέθοδος επικεντρώνεται *μόνο* σε Γωνιακές Εφικτές Λύσεις (ΓΕΛ).
 - Για κάθε πρόβλημα με τουλάχιστον μία βέλτιστη λύση, ανεύρεση μιας τέτοιας λύσης ισοδυναμεί με την ανεύρεση της καλύτερης ΓΕΛ.
- Η μέθοδος ξεκινά από το σημείο $(0, \dots, 0)$ (*origin*)
 - Βολική λύση διότι ικανοποιεί τους μη αρνητικούς περιορισμούς (non-negativity constraints) και δεν χρειάζεται καμία διαδικασία για την ανεύρεση της.
- Η μέθοδος είναι ένας επαναληπτικός αλγόριθμος. Πάει από μία ΓΕΛ σε μία *γειτονική* (*adjacent*) που *βελτιώνει* την αντικειμενική συνάρτηση.
 - Σε κάθε βήμα ελέγχει *μόνο* γειτονικές ΓΕΛ.
 - Η πορεία της μεθόδου είναι κατά μήκος των συνόρων της εφικτής (επιτρεπτής) περιοχής.
- Για όλες τις ακμές (edges) που περνούν από την τρέχων ΓΕΛ, ελέγχει το *ρυθμό καλυτέρευσης* της αντικειμενικής συνάρτησης (Z).
 -
 - Εάν δεν υπάρχει ακμή με θετικό ρυθμό καλυτέρευσης, τότε ο αλγόριθμος σταματά

Η μέθοδος Simplex



Setting Up the Simplex Method

Maximize $Z = 3x_1 + 5x_2$
subject to

$$x_1 \leq 4$$
$$2x_2 \leq 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

and $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Original form

Maximize $Z = 3x_1 + 5x_2$
subject to

$$x_1 + x_3 = 4$$
$$2x_2 + x_4 = 12$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$$

and $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5$

Augmented form

Augmented solution: solution for the *original* variables and the *slack* variables

Βασικές Λύσεις (Basic Solutions)

- **Βασική Λύση:** augmented corner-point solution
- **Ιδιότητες Βασικής Λύσης**
 - Κάθε μεταβλητή μπορεί να είναι είτε βασική είτε μη βασική
 - Ο αριθμός των βασικών μεταβλητών ισούται με τον αριθμό των περιορισμών.
 - Μη βασικές μεταβλητές έχουν την τιμή 0.
 - Οι τιμές των βασικών μεταβλητών είναι η λύση του συστήματος εξισώσεων με όλους τους περιορισμούς (functional constraints)
- **Βασική Επιτρεπτή Λύση (ΒΕΛ):** augmented Corner Point Feasible solution
 - Βασική λύση που ικανοποιεί τους μη αρνητικούς περιορισμούς

Παράδειγμα Βασικής Λύσης

$$x_1 + x_3 = 4$$

$$2x_2 + x_4 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$$

Αριθμός βασικών μεταβλητών=

Αριθμός μη βασικών μεταβλητών=

Μηδενίστε τις μη βασικές μεταβλητές:

Βασικές μεταβλητές:

Γειτονικές Βασικές Λύσεις (Adjacent Basic Solutions)

- Δύο ΒΕΛ είναι γειτονικές εάν έχουν κοινές **όλες εκτός από μία** μη βασικές μεταβλητές.
 - Με αυτό συνεπάγεται ότι **όλες εκτός από μία** βασικές μεταβλητές είναι επίσης κοινές (ενδεχομένως έχουν διαφορετικές τιμές).
- Παράδειγμα:
 - ΓΕΛ: $(0, 0) \rightarrow (0, 6)$
 - ΒΕΛ: $(0, 0, 4, 12, 18) \rightarrow (0, 6, 4, 0, 6)$

Βολική Διατύπωση και Αρχική Μορφή της μεθόδου Simplex

Maximize Z

subject to

Objective

$$Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 4$$

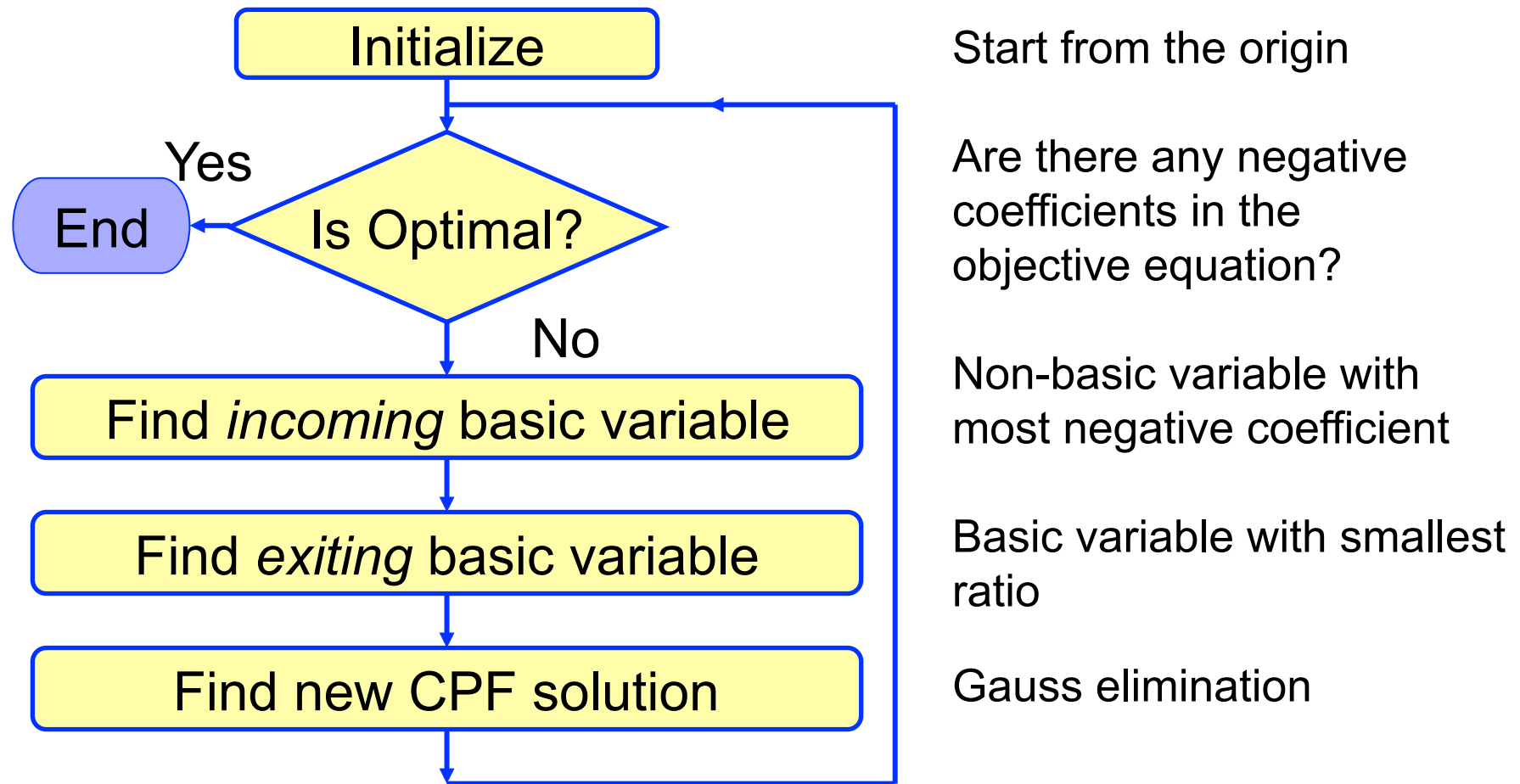
$$2x_2 + x_4 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$$

and $x_i \geq 0, i = 1, \dots, 5$

Αρχικά οι μεταβλητές x_1 και x_2 είναι μη βασικές, δηλαδή:

Ο Αλγόριθμος της μεθόδου Simplex



Πρώτο Βήμα


$$\begin{array}{rclcl} Z & -3x_1 & -5x_2 & & = 0 \\ & x_1 & & + x_3 & = 4 & 0x_2 \Rightarrow \text{no bound on } x_2 \\ & & 2x_2 & & + x_4 & = 12 & x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 & + 2x_2 & & & + x_5 & = 18 & x_2 \leq 9 \end{array}$$

1. Optimality test $\rightarrow$
2. Determine which nonbasic variable will become basic:
3. Determine which basic variable will become nonbasic.
(How much can we increase x_2 ?)
4. Find new solution.
Nonbasic: $\quad \quad \quad \cdot$ Solve for Z, x_2, x_3, x_5

Πρώτο Βήμα - συνέχεια

$$\begin{array}{rcl}
 Z & \begin{array}{c} 0 \\ -3x_1 \\ x_1 \\ 3x_1 \end{array} & \begin{array}{l} -5x_2 \\ \\ 2x_2 \\ +2x_2 \end{array} \\
 & & + x_3 \\
 & \begin{array}{c} 0 \\ \\ +x_4 \end{array} & \\
 & & = 0 \\
 & & = 4 \\
 & & = 12 \\
 & & + x_5 = 18
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 Z & \begin{array}{c} 0 \\ -3x_1 \\ x_1 \\ 3x_1 \end{array} & \begin{array}{l} \\ \\ x_2 \\ \end{array} \\
 & & + x_3 \\
 & \begin{array}{c} 0 \\ +\frac{5}{2}x_4 \\ +\frac{1}{2}x_4 \\ -x_4 \end{array} & \\
 & & = 30 \\
 & & = 4 \Rightarrow x_3 = 4 \\
 & & = 6 \Rightarrow x_2 = 6 \\
 & & + x_5 = 6 \Rightarrow x_5 = 6
 \end{array}$$

Επόμενο Βήμα

$$\begin{array}{rclcl} Z & -3x_1 & & +\frac{5}{2}x_4 & = 30 \\ & x_1 & +x_3 & & = 4 & x_1 \leq 4 \\ & & x_2 & +\frac{1}{2}x_4 & = 6 & x_2 \leq 6 \Rightarrow \text{no bound on } x_1 \\ & 3x_1 & & -x_4 + x_5 & = 6 & x_1 \leq 2 \end{array}$$

1. Optimality test $\rightarrow$
2. Determine which nonbasic variable will become basic:
3. Determine which basic variable will become nonbasic.
(How much can we increase x_1 ?)
4. Find new solution.
Nonbasic: $x_4=0, x_5=0$. Solve for Z, x_1, x_2, x_3

Επόμενο Βήμα - συνέχεια

$$\begin{array}{rcll}
 Z & -3x_1 & +\frac{5}{2}x_4 & = 30 \\
 & x_1 & +x_3 & = 4 \\
 & x_2 & +\frac{1}{2}x_4 & = 6 \\
 & 3x_1 & -x_4 + x_5 & = 6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
 Z & +\frac{3}{2}x_4 & +x_5 & = 36 \\
 & x_3 & +\frac{1}{3}x_4 & -\frac{1}{3}x_5 = 2 \\
 & x_2 & +\frac{1}{2}x_4 & = 6 \\
 & x_1 & -\frac{1}{3}x_4 & +\frac{1}{3}x_5 = 2
 \end{array}$$

Αρχικός Πίνακας Simplex

$$Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 4$$

$$2x_2 + x_4 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$$

Basic variables	Coefficients of:						Right side	Ratio
	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Z	1	-3	-5	0	0	0	0	
x_3	0	1	0	1	0	0	4	
x_4	0	0	2	0	1	0	12	
x_5	0	3	2	0	0	1	18	

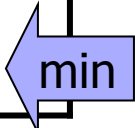
Simplex Tableau

Basic variables	Coefficients of:						Right side	Ratio
	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Z	1	-3	-5	0	0	0	0	
x_3	0	1	0	1	0	0	4	
x_4	0	0	2	0	1	0	12	12/2=6
x_5	0	3	2	0	0	1	18	18/2=9

min

Basic variables	Coefficients of:						Right side	Ratio
	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Z	1	-3	0	0	5/2	0	30	
x_3	0	1	0	1	0	0	4	
x_2	0	0	1	0	1/2	0	6	
x_5	0	3	0	0	-1	1	6	

Simplex Tableau -Continued

Basic variables	Coefficients of:						Right side	Ratio
	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Z	1	-3	0	0	$5/2$	0	30	$4/1=4$
x_3	0	1	0	1	0	0	4	
x_2	0	0	1	0	$1/2$	0	6	
x_5	0	3	0	0	-1	1	6	$6/3=2$ 

Basic variables	Coefficients of:						Right side	Ratio
	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Z	1	0	0	0	$3/2$	1	36	
x_3	0	0	0	1	$1/3$	$-1/3$	2	
x_2	0	0	1	0	$1/2$	0	6	
x_1	0	1	0	0	$-1/3$	$1/3$	2	

Tie-breakers – Entering basic variables

Basic variables	Coefficients of:						Right side	Ratio
	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Z	1	-3	-3	0	0	0	0	
x_3	0	1	0	1	0	0	4	
x_4	0	0	2	0	1	0	12	
x_5	0	3	2	0	0	1	18	

Διαλέξτε μια στην τύχη.

Tie-breakers – Leaving basic variables

Basic variables	Coefficients of:						Right side	Ratio
	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Z	1	-3	-5	0	0	0	0	
x_3	0	1	0	1	0	0	4	
x_4	0	0	2	0	1	0	12	$12/2=6$
x_5	0	3	4	0	0	1	24	$24/4=6$

Degeneracy – Problem of possible infinite loops

No leaving basic variables – Unbounded Z

Basic variables	Coefficients of:				Right side	Ratio
	Z	x_1	x_2	x_3		
Z	1	-3	-5	0	0	
x_3	0	1	0	1	4	

No ratio (4/0)!

No leaving basic variable

Πολλαπλές Βέλτιστες Λύσεις

Basic variables	Coefficients of:						Right side	Ratio
	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Z	1	0	0	0	0	1	18	
x_1	0	1	0	1	0	0	4	
x_4	0	0	0	3	1	-1	6	
x_2	0	0	1	-3/2	0	1/2	3	

nonbasic

1. Optimal? YES
2. Optimal solution= $x_1=4, x_2=3, x_4=6$
3. More Optimal solutions?

Πολλαπλές Βέλτιστες Λύσεις

Basic variables	Coefficients of:						Right side	Ratio
	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Z	1	0	0	0	0	1	18	
x_1	0	1	0	1	0	0	4	$4/1=4$
x_4	0	0	0	3	1	-1	6	$6/3=2$
x_2	0	0	1	-3/2	0	1/2	3	$3/(-3/2)=-2$

Basic variables	Coefficients of:						Right side	Ratio
	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Z	1	0	0	0	0	1	18	
x_1	0	1	0	0	-1/3	1/3	2	$2/(-1/3)=-6$
x_3	0	0	0	1	1/3	-1/3	2	$2/(1/3)=6$
x_2	0	0	1	0	1/2	0	6	$6/(1/2)=12$

Πολλαπλές Βέλτιστες Λύσεις

Λύση 1: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

Λύση 2: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

Άλλες Λύσεις: Κάθε κυρτός συνδυασμός των λύσεων 1 και 2:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + (1 - \alpha) \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{where } 0 \leq \alpha \leq 1$$

Άλλες Δυνατές Διατυπώσεις

Ελαχιστοποίηση:

$$\text{Minimize } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$\text{Maximize } -Z = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n$$

Περιορισμοί:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$$

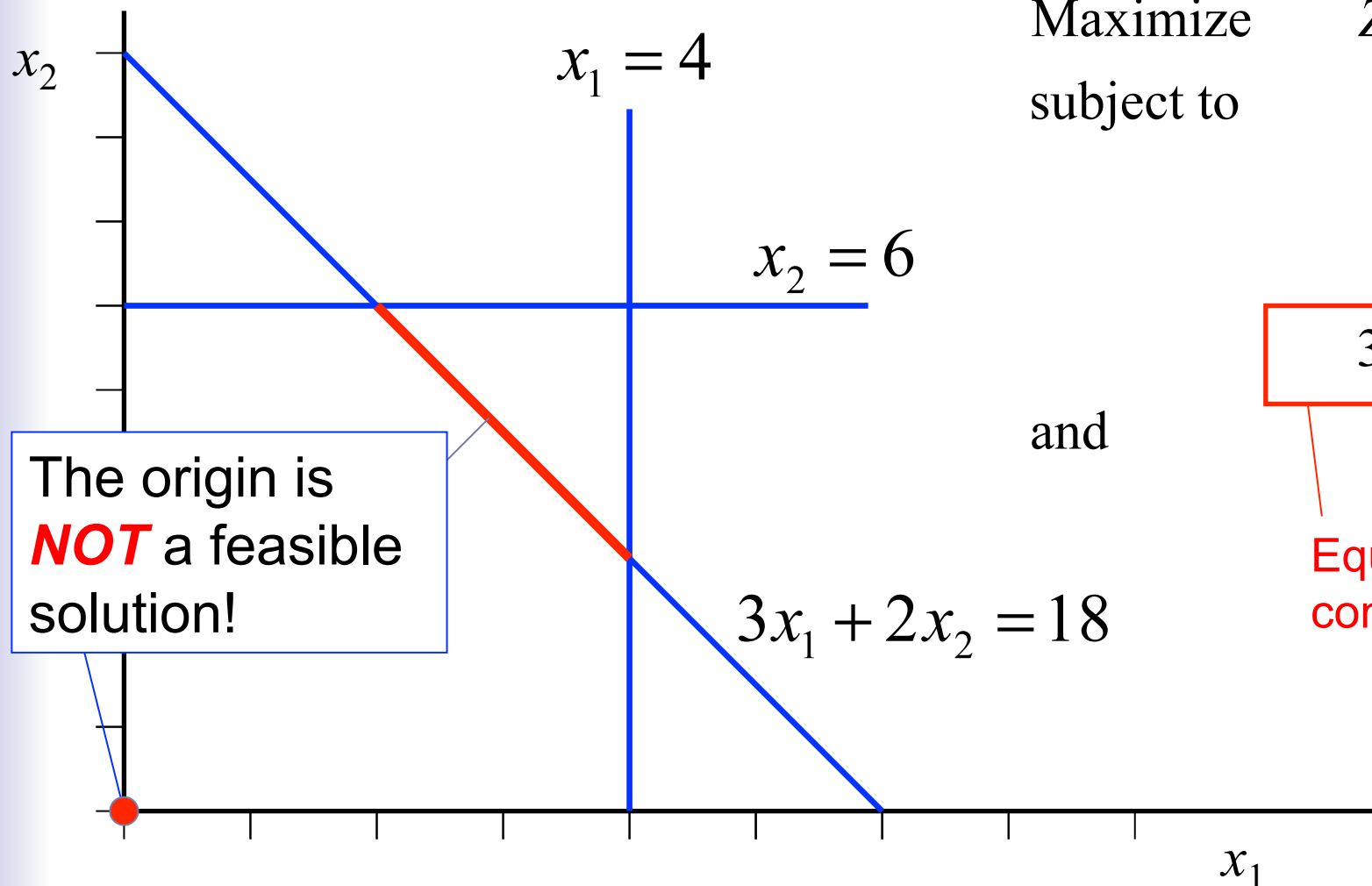
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \leq 0$$

x_i can take negative values

Προβληματικές
περιπτώσεις

Υπάρχουν διάφοροι μετασχηματισμοί οι οποίοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να επιλυθεί το πρόβλημα με την simplex

Περιορισμοί Ισότητας



Maximize
subject to

$$Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 = 18$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

and

Equality
constraint

Ακέραιος Προγραμματισμός (ΑΠ)

- Ακέραιος Προγραμματισμός (ΑΠ)
 - Οι μεταβλητές παίρνουν ακέραιες τιμές 0, 1, 2...
 - Διαιρετότητα δεν ισχύει.

- Μικτός Ακέραιος Προγραμματισμός (ΜΑΠ)

- Δυαδικές μεταβλητές (yes-no decisions)

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{if decision } j \text{ is yes} \\ 0 & \text{if decision } j \text{ is no} \end{cases}$$

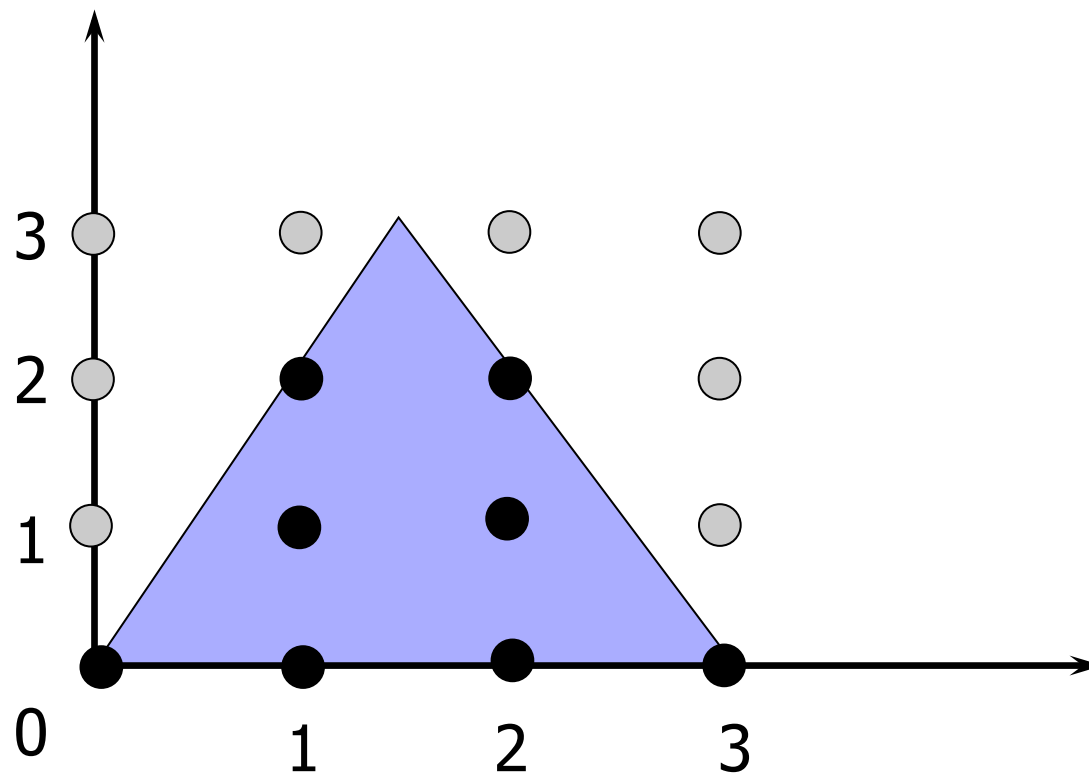
- Προβλήματα ΑΠ είναι δύσκολα να λυθούν
 - Η βέλτιστη λύση δεν είναι κατ' ανάγκη γωνιακή λύση.
 - Μεγάλος αριθμός δυνατών λύσεων

Ακέραιος Προγραμματισμός (ΑΠ)

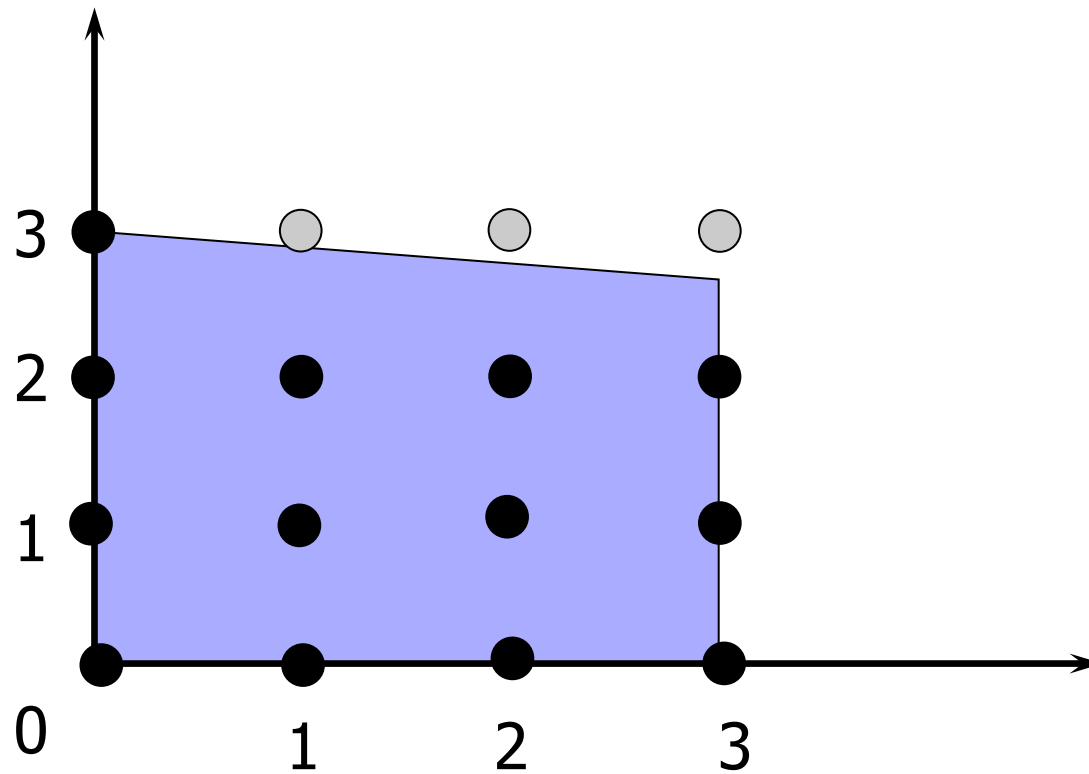
■ Χαλάρωση ΓΠ (LP Relaxation)

- Εάν η λύση του ΓΠ ικανοποιεί τους περιορισμούς ακεραιότητας, τότε η λύση *πρέπει* να είναι και βέλτιστη λύση του ΑΠ.
- Η λύση του ΑΠ δεν μπορεί να είναι καλύτερη από τη λύση του ΓΠ

Λύση ΑΠ χρησιμοποιώντας χαλάρωση ΓΠ



Λύση ΑΠ χρησιμοποιώντας χαλάρωση ΓΠ



Τεχνική Διακλάδωσης και Περιορισμού (Branch and Bound Technique)

Maximize $Z = 5x_1 + 4x_2$
s.t. $x_1 \leq 6$
 $x_2 \leq 5$
 $3x_1 + 2x_2 \leq 21$
 $x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2$ integers

Χαλάρωση

Maximize $Z = 5x_1 + 4x_2$
s.t. $x_1 \leq 6$
 $x_2 \leq 5$
 $3x_1 + 2x_2 \leq 21$
 $x_1, x_2 \geq 0$

Λύση ΓΠ

$x_1 = 3.67, x_2 = 5,$
 $Z = 38.3$

$0 \leq x_1 \leq 3$

$4 \leq x_1 \leq 6$

Διακλάδωση

Τεχνική Διακλάδωσης και Περιορισμού (Branch and Bound Technique)

Διακλάδωση

Maximize $Z = 5x_1 + 4x_2$
s.t. $x_1 \leq 3$
 $x_2 \leq 5$
 $3x_1 + 2x_2 \leq 21$
 $x_1, x_2 \geq 0$

Maximize $Z = 5x_1 + 4x_2$
s.t. $4 \leq x_1 \leq 6$
 $0 \leq x_2 \leq 5$
 $3x_1 + 2x_2 \leq 21$

Λύση 1: $x_1 = 3, x_2 = 5,$
 $Z = 35$

Ακέραια Λύση =>
Δυνατή Λύση!

Λύση 2: $x_1 = 4, x_2 = 4.5,$
 $Z = 38$

Διακλάδωση

$0 \leq x_2 \leq 4$

$5 \leq x_2 \leq 5$
 $\Rightarrow x_2 = 5$

Τεχνική Διακλάδωσης και Περιορισμού (Branch and Bound Technique)



Διακλάδωση

Maximize $Z = 5x_1 + 4x_2$
s.t. $4 \leq x_1 \leq 6$
 $0 \leq x_2 \leq 4$
 $3x_1 + 2x_2 \leq 21$

Maximize $Z = 5x_1 + 4x_2$
s.t. $4 \leq x_1 \leq 6$
 $5 \leq x_2 \leq 5$
 $3x_1 + 2x_2 \leq 21$

Λύση 3: $x_1 = 4.3, x_2 = 4,$
 $Z = 37.7$

Δεν υπάρχει λύση

$5 \leq x_1 \leq 6$

Διακλάδωση
 $4 \leq x_1 \leq 4$
 $\Rightarrow x_1 = 4$

Τεχνική Διακλάδωσης και Περιορισμού (Branch and Bound Technique)

Διακλάδωση

Maximize $Z = 5x_1 + 4x_2$
s.t. $5 \leq x_1 \leq 6$
 $0 \leq x_2 \leq 4$
 $3x_1 + 2x_2 \leq 21$

Maximize $Z = 5x_1 + 4x_2$
s.t. $4 \leq x_1 \leq 4$
 $0 \leq x_2 \leq 4$
 $3x_1 + 2x_2 \leq 21$

Λύση 5: $x_1 = 5, x_2 = 3,$
 $Z = 37$

Λύση 6: $x_1 = 4, x_2 = 4,$
 $Z = 36$

Καλύτερη μέχρι
τώρα λύση:

$$x_1 = 3, x_2 = 5, Z^* = 35$$

