Προβλήματα Μεταφορών (Transportation)

- Προβλήματα Μεταφορών (Transportation)
  - Μέθοδος Simplex για Προβλήματα Μεταφοράς
- Προβλήματα Εκχώρησης (assignment)

Παράδειγμα: Κατανομή Νερού

Η υδατοπρομήθεια μιας περιφέρεια παίρνει νερό από 3 ποταμούς και το διοχετεύει σε 4 πόλεις. Η μέγιστη παροχή από τον κάθε ποταμό, οι ανάγκες κάθε πόλης καθώς και το κόστος μεταφοράς του νερού από τον κάθε ποταμό στη κάθε πόλη φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα.

Ζητείτε: Πρόγραμμα παροχής νερού έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το ολικό κόστος μεταφοράς.

	Κόστος Μεταφοράς ($)				
	Πόλη				
Ποταμός	**1**	**2**	**3**	**4**	**Μέγιστη Παροχή**
1	16	13	22	17	50
2	14	13	19	15	60
3	19	20	23	-	50
Ελάχιστη Παροχή	30	70	0	10	
Ζήτηση	50	70	30	∞	

Διατύπωση ΓΠ

x_{ij}: ποσότητα νερού που διοχετεύεται από τον ποταμό i στην πόλη j, i=1,2,3, j=1,2,3,4.

$$\text{Minimize} \quad Z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leq b_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Μέγιστη παροχή του ποταμού i.

Ένας περιορισμός για κάθε ποταμό

$$e_j \leq \sum_{i=1}^{3} x_{ij} \leq d_i, \qquad j = 1, \ldots, 4.$$

Μέγιστη ζήτηση της πόλης j.

Ένας περιορισμός για κάθε πόλη

$$x_{ij} \geq 0$$

Μη αρνητικοί περιορισμοί

Διατύπωση ΓΠ

$$\text{Minimize} \quad Z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leq b_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

$$e_j \leq \sum_{i=1}^{3} x_{ij} \leq d_i, \qquad j = 1, \ldots, 4.$$

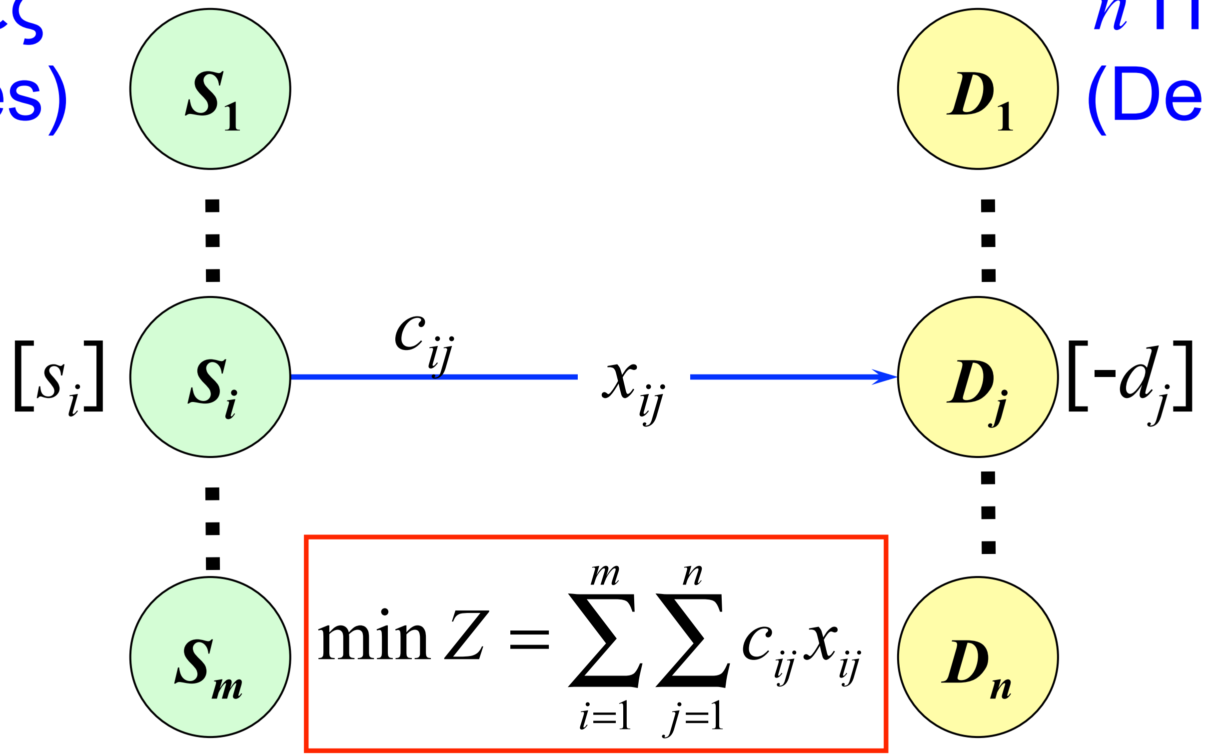
$$x_{ij} \geq 0$$

- Το πρόβλημα αυτό θα μπορούσε να λυθεί χρησιμοποιώντας τη μέθοδο simplex.
- Για προβλήματα ροής σε δίκτυα υπάρχει «αναθεωρημένη» μορφή της simplex η οποία είναι πολύ πιο αποδοτική.

Γενική Διατύπωση Προβλήματος Μεταφοράς –Διατύπωση Δικτύου

m Πηγές (Sources)

n Προορισμοί (Destinations)



$$\boxed{\min Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i, i = 1,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, j = 1,\ldots,n$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1,\ldots,m; j = 1,\ldots,n$$

Διατύπωση με Πίνακα Παραμέτρων (Parameter Table)

	Μεταφορικό Κόστος				
	Προορισμός (Destination)				
Πηγή (Source)	**1**	**2**	**…**	***n***	**Παραγωγή (Supply)**
1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	s_1
2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	s_2
…	…	…	…	…	…
m	c_{m1}	c_{m2}		c_{mn}	s_m
Demand Ζήτηση	d_1	d_2	…	d_n	

Προβλήματα Μεταφοράς: Υποθέσεις (assumptions) & Ιδιότητες

- **Υπόθεση Απαιτήσεων (Requirements Assumption)**
  - Κάθε πηγή (source) μπορεί να παράξει ένα προκαθορισμένο αριθμό προϊόντων s_i, $i=1,\ldots,m$. Ολόκληρη η παραγωγή πρέπει να διατεθεί στα κέντρα κατανάλωσης (προορισμούς).
  - Κάθε προορισμός (destination) έχει μια προκαθορισμένη ζήτηση για d_j, $j=1,\ldots,n$ μονάδες. Ολόκληρη η ζήτηση πρέπει να ικανοποιηθεί από τις πηγές.

Προβλήματα Μεταφοράς: Υποθέσεις (assumptions) & Ιδιότητες

- **Ιδιότητα Εφικτής Λύσης (Feasible Solution Property)**
  - Ένα πρόβλημα μεταφοράς έχει εφικτή λύση εάν και μόνο αν ισχύει:

- **Υπόθεση Αναλογικού Κόστους (Cost assumption):**
  - Το κόστος μεταφοράς προϊόντων από οποιαδήποτε πηγή σε οποιοδήποτε προορισμό είναι *ανάλογο* προς τον αριθμό των διανυμένων μονάδων.
  - Το συνολικό κόστος μεταφοράς x μονάδων από την πηγή i στον προορισμό j είναι ίσο με $c_{ij}x$ όπου c_{ij} είναι το κόστος μεταφοράς μίας μονάδας από την πηγή i στον προορισμό j.

Προβλήματα Μεταφοράς: Υποθέσεις (assumptions) & Ιδιότητες

- **Μοντέλο Μεταφορών:**
  - *Κάθε* πρόβλημα (μεταφοράς ή μη) εμπίπτει στο πρότυπο προβλημάτων μεταφοράς εάν μπορεί να περιγραφεί πλήρως είτε με τον πίνακα παραμέτρων ή με διατύπωση δικτύου και ικανοποιεί τις υποθέσεις απαιτήσεων και αναλογικού κόστους.
  - Ο στόχος είναι η *ελαχιστοποίηση* του συνολικού κόστους μεταφοράς.

- **Ιδιότητα Ακέραιας Λύσης:**
  - Για προβλήματα μεταφοράς όπου κάθε s_i και d_j έχουν ακέραια τιμή, όλες οι βασικές μεταβλητές σε κάθε βασική εφικτή λύση παίρνουν *ακέραιες* τιμές.
- **Μέθοδος Simplex για προβλήματα μεταφοράς.**
  - Υπολογιστικά αποδοτικός αλγόριθμος για τη λύση προβλημάτων μεταφοράς.

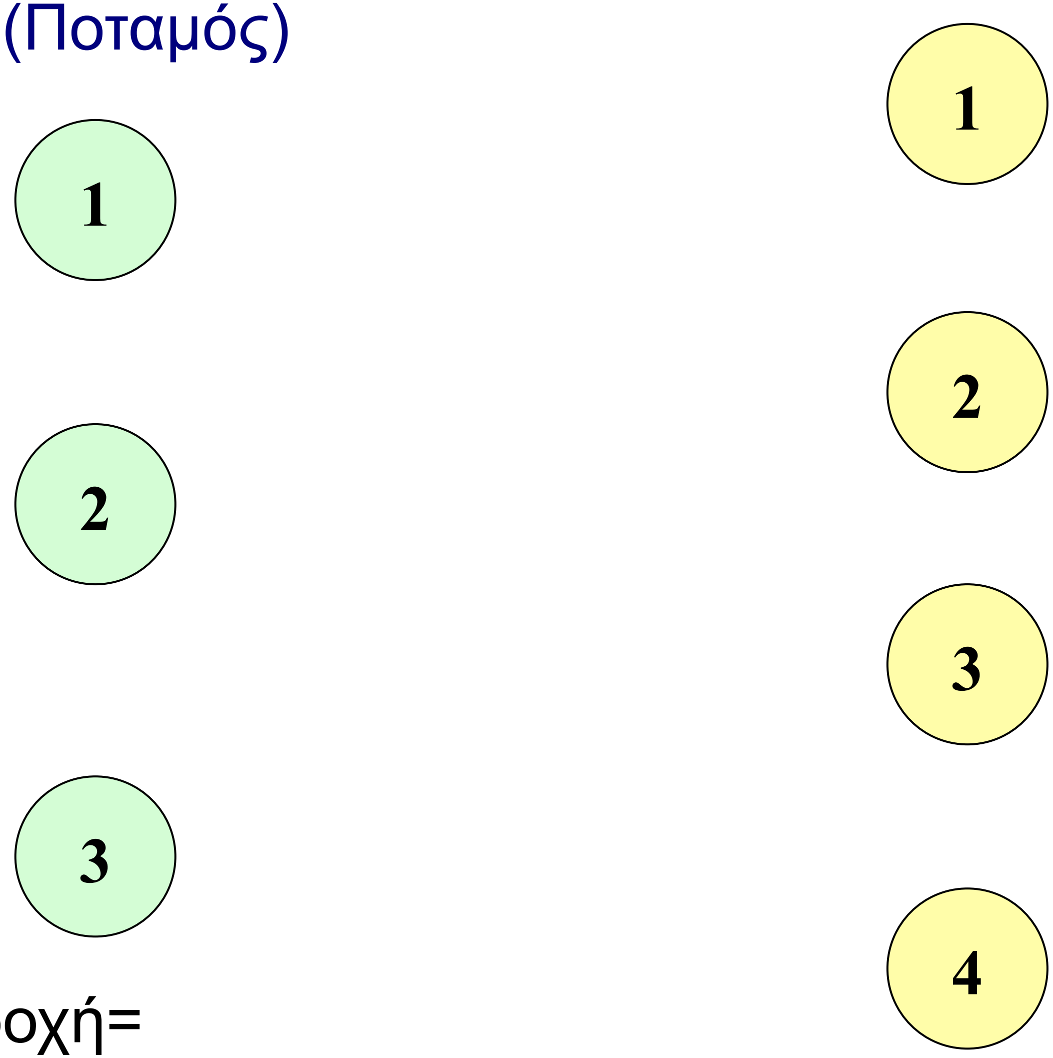
Πρόβλημα Κατανομής Νερού

Ποταμός	Κόστος Μεταφοράς ($)				Μέγιστη Παροχή
	Πόλη				
	1	**2**	**3**	**4**	
1	16	13	22	17	50
2	14	13	19	15	60
3	19	20	23	-	50
Ελάχιστη Παροχή	30	70	0	10	
Ζήτηση	50	70	30	∞	

Κατανομή Νερού – Μοντέλο Δικτύου

Πηγή (Ποταμός)

Προορισμός (Πόλη)



Συνολική Παροχή=

Κατανομή Νερού

Ποταμός	Κόστος Μεταφοράς ($) Πόλη 1	2	3	4	Συνολική Παροχή
Ελάχιστη Παροχή	30	70	0	10	160
Ζήτηση	50	70	30	∞	

Μέγιστη Ζήτηση Πόλης 4=

Μέγιστη Συνολική Ζήτηση=

Εικονική Πηγή: Αντιπροσωπεύει ανικανοποίητη ζήτηση!

Ελάχιστη παροχή Πόλης 4= Κάτω από οποιαδήποτε κατανομή, η Πόλη 4 θα πάρει την ελάχιστη ζητούμενη παροχή!

Η Πόλη 3 δεν έχει ελάχιστη ζήτηση, έτσι η ζήτηση της μπορεί να ικανοποιηθεί από οποιαδήποτε πηγή (εικονική ή μη).

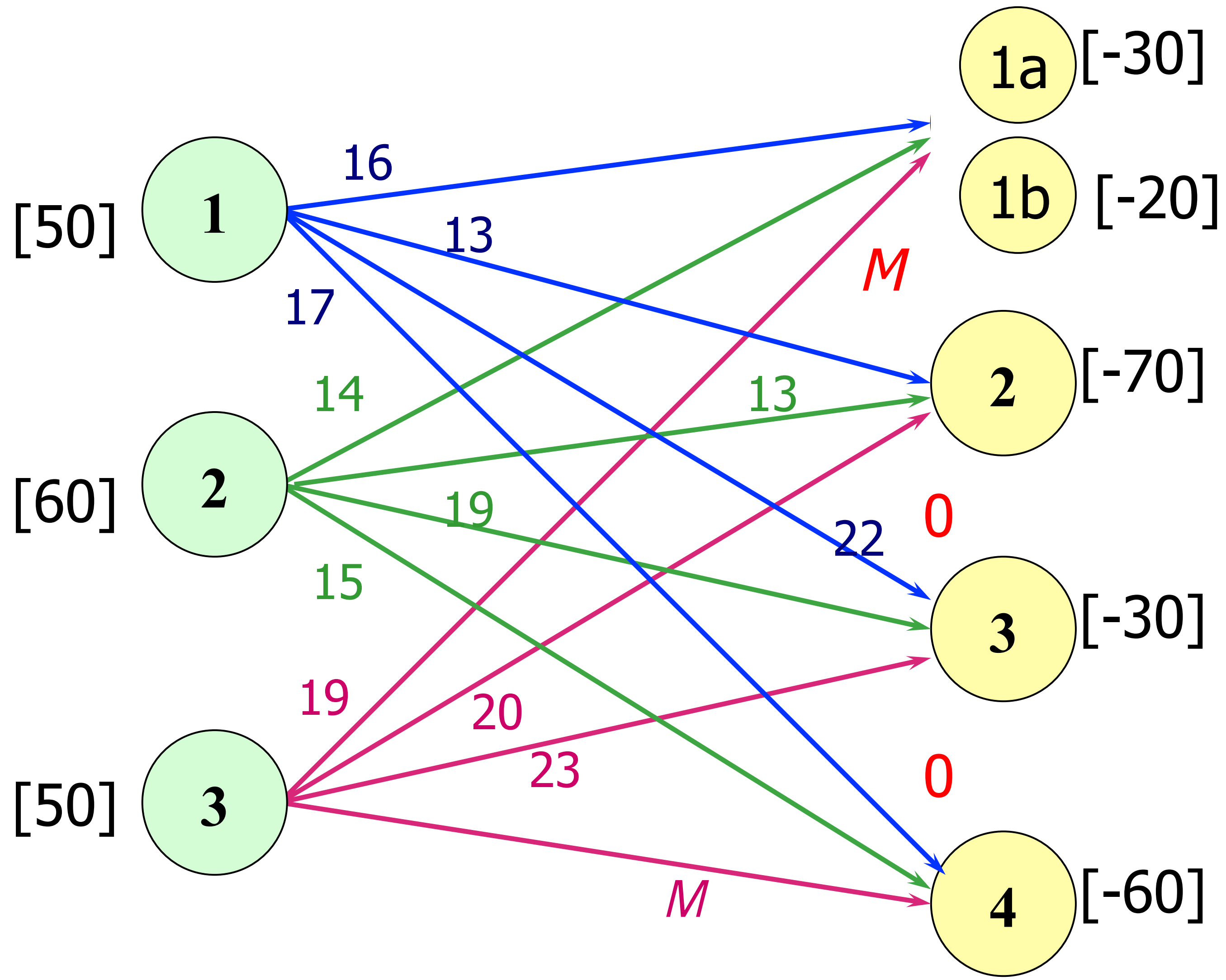
Κατανομή Νερού

Ποταμός	Κόστος Μεταφοράς ($)				Συνολική Παροχή
	Πόλη				
	1	**2**	**3**	**4**	
Ελάχιστη Παροχή	30	70	0	10	160
Ζήτηση	50	70	30	∞	

Για την Πόλη 2 η ελάχιστη ζήτηση ισούται με την μέγιστη, άρα η ζήτηση αυτής της πόλης δεν μπορεί να ικανοποιηθεί από την εικονική πηγή.

Για την Πόλη 1 η ελάχιστη ζήτηση ισούται με 30, οπόταν μη εικονικές πηγές πρέπει να παράσχουν τουλάχιστον 30 μονάδες.

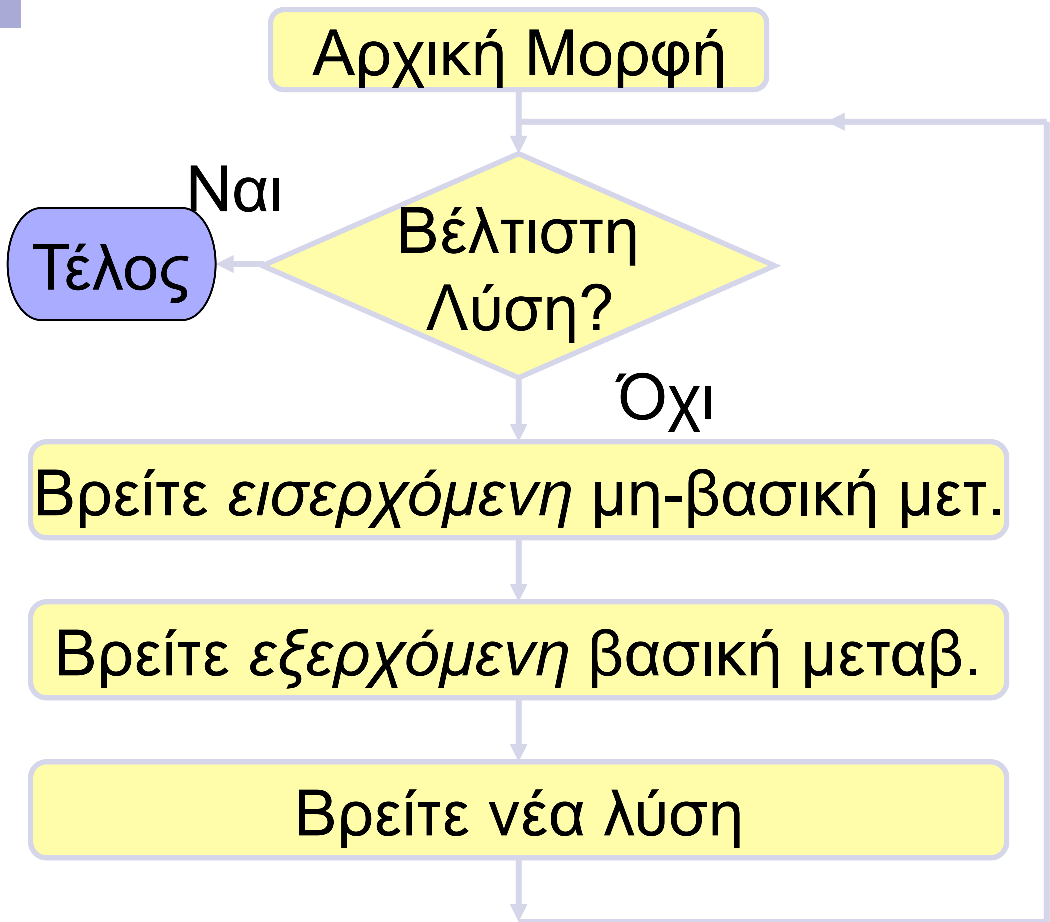
Κατανομή Νερού – Μοντέλο Δικτύου



Κατανομή Νερού – Πίνακας Παραμέτρων

	Κόστος ανά μονάδα νερού					
	Προορισμός (Πόλη)					
Ποταμός	**1a**	**1b**	**2**	**3**	**4**	**Μέγιστη Παροχή**
1	16	16	13	22	17	50
2	14	14	13	19	15	60
3	19	19	20	23	M	50
4(E)	M	0	M	0	0	50
Ζήτηση	30	20	70	30	60	

Ο Αλγόριθμος της μεθόδου Simplex



[0,...,0]

Υπάρχουν αρνητικοί συντελεστές στην αντικειμενική?

Μη βασική μεταβλητή με τον πιο αρνητικό συντελεστή

Βασική μεταβλητή με τη μικρότερη αναλογία

Μέθοδος Gauss elimination

- Η «εξειδικευμένη» simplex (για προβλήματα μεταφοράς) έχει ακριβώς τα ίδια βήματα, όμως το κάθε βήμα υπολογίζεται κάπως διαφορετικά.

Πίνακας Simplex για Προβλήματα Μεταφοράς-Γενική Μορφή

	Προορισμός					
Πηγή	**1**	**2**	**...**	***n***	**Παραγ**	u_i
1	c_{11}	c_{12}		c_{1n}	s_1	
2	c_{21}	c_{22}		c_{2n}	s_2	
	…	…	…	…		
m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	s_m	
Ζήτηση	d_1	d_2	…	d_n		
v_j						

Εάν x_{ij} είναι βασική: αναγράφεται η τιμή της σε κύκλο.

Εάν x_{ij} είναι μη βασική: αναγράφεται η τιμή c_{ij}-u_i-v_j

Πίνακας Simplex για το Πρόβλημα της Κατανομής Νερού

	Προορισμός						
Πηγή	**1a**	**1b**	**2**	**3**	**4**	**Παρ.**	u_i
1	16	16	13	22	17	50	
2	14	14	13	19	15	60	
3	19	19	20	23	M	50	
4(E)	M	0	M	0	0	50	
Ζήτ.	30	20	70	30	60	Z=2,470 + 10M	
v_j							

Βήμα 1: Βρείτε μία εφικτή λύση

Βήμα 1

- Τρόποι ανεύρεσης αρχικής εφικτής λύσης:
  - Northwest corner rule
    - Απλή αλλά δεν βρίσκει καλή αρχική λύση, με αποτέλεσμα να χρειάζονται περισσότερες επαναλήψεις
  - Vogel's approximation method
  - Russell's approximation method
    - Οι μέθοδοι Vogel's και Russell's approximation χρησιμοποιούν τους συντελεστές κόστους με αποτέλεσμα να βρίσκουν αρχικές λύσεις σημαντικά πιο κοντά στη βέλτιστη λύση απ' ότι η μέθοδος Northwest corner
    - Η μέθοδος Russell's approximation συχνά βρίσκει τις καλύτερες λύσεις.
- Αριθμός Βασικών Μεταβλητών
  - $m+n-1$! (γιατί;)
- Για όλες τις βασικές μεταβλητές ισχύει:
  - $c_{ij} - u_i - v_j = 0$

Πίνακας Simplex για το Πρόβλημα της Κατανομής Νερού

Πηγή	**Προορισμός** 1a	1b	2	3	4	**Παρ.**	u_i
1	16 30	16 20	13	22	17	50	
2	14	14 0	13 60	19	15	60	
3	19	19	20 10	23 30	M 10	50	
4(E)	M	0	M	0	0 50	50	
Ζήτ.	30	20	70	30	60	Z=2,470 + 10M	
v_j							

Για όλες τις *βασικές* μεταβλητές ισχύει: $c_{ij} - u_i - v_j = 0$

Κριτήριο για Εύρεση Βέλτιστης Λύσης

- Μία βασική εφικτή λύση είναι βέλτιστη εάν και μόνο αν $c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$ για όλες τις μεταβλητές x_{ij} οι οποίες είναι μη βασικές

Πίνακας Simplex για το Πρόβλημα της Κατανομής Νερού

Πηγή	Προορισμός 1a	1b	2	3	4	Παρ.	u_i
1	16 30	16 20	13	22	17	50	-5
2	14	14 0	13 60	19	15	60	-7
3	19	19	20 10	23 30	M 10	50	0
4(E)	M	0	M	0	0 50	50	-M
Ζήτ.	30	20	70	30	60	Z=2,470 + 10M	
v_j	21	21	20	23	M		

Για όλες τις μη-βασικές μεταβλητές υπολογίζουμε: $c_{ij} - u_i - v_j$

Εισερχόμενη Βασική Μεταβλητή

- Η ποσότητα $c_{ij} - u_i - v_j$ υποδεικνύει το ρυθμό αύξησης της αντικειμενικής συνάρτησης όταν αυξάνεται η σχετική μη βασική μεταβλητή

- Επομένως, εφόσον θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την αντικειμενική συνάρτηση, εισερχόμενη είναι αυτή της οποίας $c_{ij} - u_i - v_j$ έχει την *πιο αρνητική* τιμή

Εξερχόμενη Βασική Μεταβλητή

Πηγή	1a	1b	2	3	4	Παρ.	u_i
		Προορισμός					
1	16 30	16 20	13 -2	22 4	17 -M+22	50	-5
2	14 0	14 0	13 60	19 3	15 -M+22	60	-7
3	19 -2	19 -2	20 10	23 30	M 10	50	0
4(E)	M 2M-21	0 M-21	M 2M-20	0 M-23	0 50	50	-M
Ζήτ.	30	20	70	30	60	Z=2,470 + 10M	
v_j	21	21	20	23	M		

Εξερχόμενη μεταβλητή είναι αυτή που θα μειωθεί πρώτη στο μηδέν εξαιτίας της αύξησης εισερχόμενης μη βασικής μεταβλητής

Εξερχόμενη Βασική Μεταβλητή

Πηγή	1a	1b	2	3	4	Παρ.	u_i
	Προορισμός						
1	16 30	16 20	13 -2	22 4	17 -M+22	50	-5
2	14 0	14 0	13 60	19 3	15 -M+22	60	-7
3	19 -2	19 -2	20 10	23 30	M 10	50	0
4(E)	M 2M-21	0 M-21	M 2M-20	0 M-23	0 50	50	-M
Ζήτ.	30	20	70	30	60	Z=2,470 + 10M	
v_j	21	21	20	23	M		

Εξερχόμενη μεταβλητή είναι αυτή που θα μειωθεί πρώτη στο μηδέν εξαιτίας της αύξησης εισερχόμενης μη βασικής μεταβλητής

Νέα Βασική Λύση

Πηγή	Προορισμός 1a	1b	2	3	4	Παρ.	u_i
1	16 30	16 20	13	22	17	50	-5
2	14	14 0	13	19	15	60	-7
3	19	19	20	23 30	M	50	0
4(E)	M	0	M	0	0 50	50	-M
Ζήτ.	30	20	70	30	60	Z =2,690	
v_j	21	21	20	23	M		

Βέλτιστη Βασική Λύση;

Πηγή	Προορισμός 1a	1b	2	3	4	Παρ.	u_i
1	16 30	16 20	13	22	17	50	-5
2	14	14 0	13 50	19	15 10	60	
3	19	19	20 20	23 30	M	50	0
4(E)	M	0	M	0	0 50	50	
Ζήτ.	30	20	70	30	60	Z=2,690	
v_j	21	21	20	23			

Για όλες τις βασικές μεταβλητές: $c_{ij} - u_i - v_j = 0$

Βέλτιστη Βασική Λύση;

Πηγή	Προορισμός 1a	1b	2	3	4	Παρ.	u_i
1	16 30	16 20	13 -2	22 4	17 0	50	-5
2	14 0	14 0	13 50	19 3	15 10	60	-7
3	19 -2	19 -2	20 20	23 30	M M-22	50	0
4(E)	M M+1	0 1	M M+2	0 -1	0 50	50	-22
Ζήτ.	30	20	70	30	60	Z=2,690	
v_j	21	21	20	23	22		

Ο αλγόριθμος επαναλαμβάνεται ξανά!

Προβλήματα Κατανομής (Assignment Problems)

- Παραδείγματα
  - Κατανομή ατόμων στην εκτέλεση μίας δραστηριότητας
  - Κατανομή εργατών σε μηχανές
  - Κατανομή μηχανών σε προϊόντα
  - Κατανομή πληρωμάτων σε δρομολόγια
  - Κλπ, κλπ, κλπ...
- Σημαντικό χαρακτηριστικό
  - **Ακεραιότητα** (δεν μπορούμε να κατανέμουμε ½ άτομο!)

Προϋποθέσεις Προβλημάτων Κατανομής

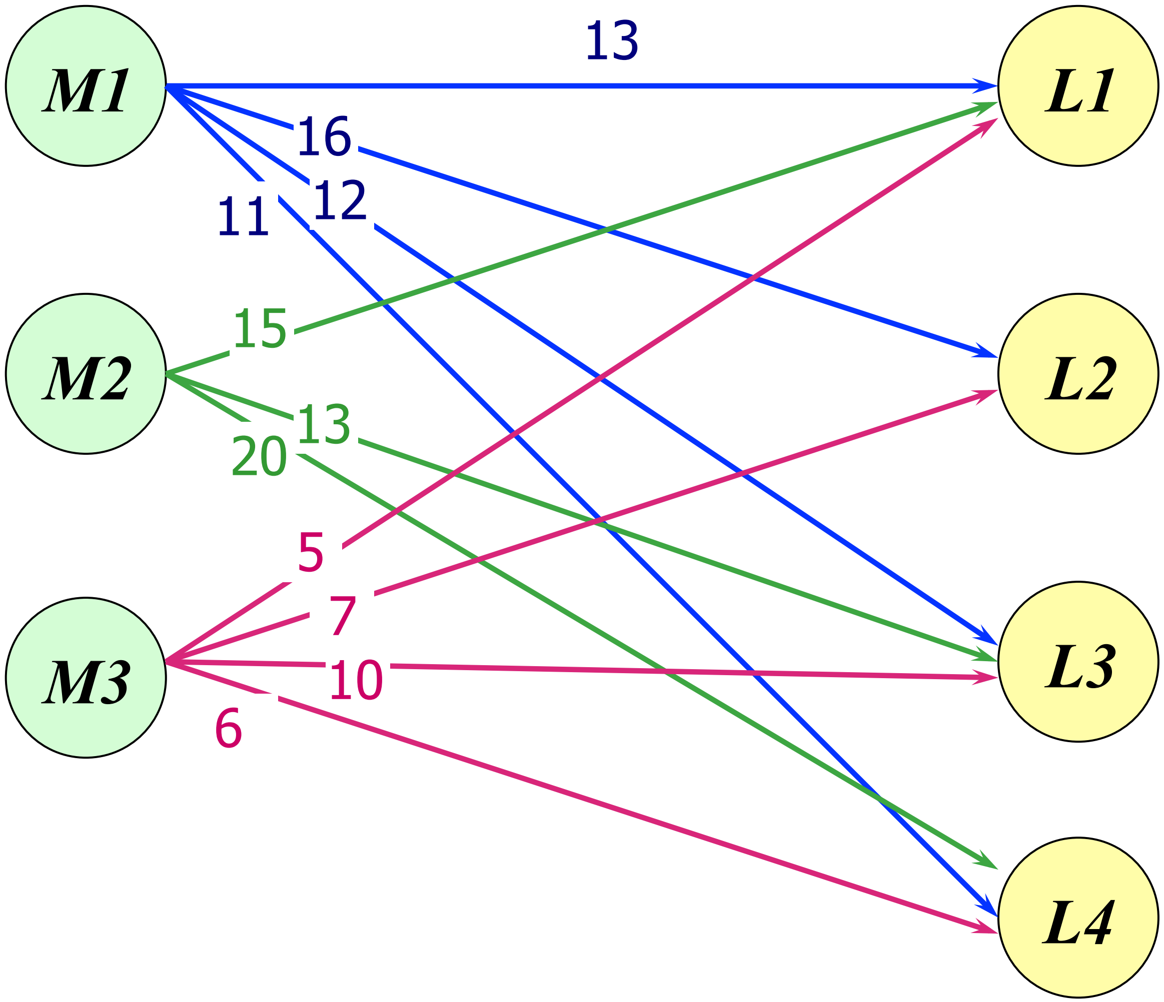
- Ο αριθμός των ατόμων (assignees) και ο αριθμός των δραστηριοτήτων (assignments or tasks) είναι ίσοι με n
- Κάθε άτομο κατανέμεται στην εκτέλεση *μίας μόνο* δραστηριότητας
- Κάθε δραστηριότητα εκτελείται από *ένα μόνο* άτομο
- Υπάρχει κόστος c_{ij} εάν το άτομο i, (i=1,…,n) εκτελέσει τη δραστηριότητα j (j=1,…,n)
- Ο στόχος είναι να βρεθεί η άριστη κατανομή που να ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.

Job Shop Company

- Η εταιρεία αγόρασε 3 νέες μηχανές
- Οι μηχανές μπορούν να εγκατασταθούν σε 4 διαφορετικές τοποθεσίες (L1, L2, L3 L4)
- Ο πιο κάτω πίνακας δείχνει το κόστος εγκατάστασης της μηχανής i στην τοποθεσία j.
- Βρείτε την τοποθεσία που πρέπει να εγκατασταθεί η κάθε μηχανή έτσι που να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος

	Τοποθεσία			
Μηχανή	**L1**	**L2**	**L3**	**L4**
M1	13	16	12	11
M2	15	-	13	20
M3	5	7	10	6

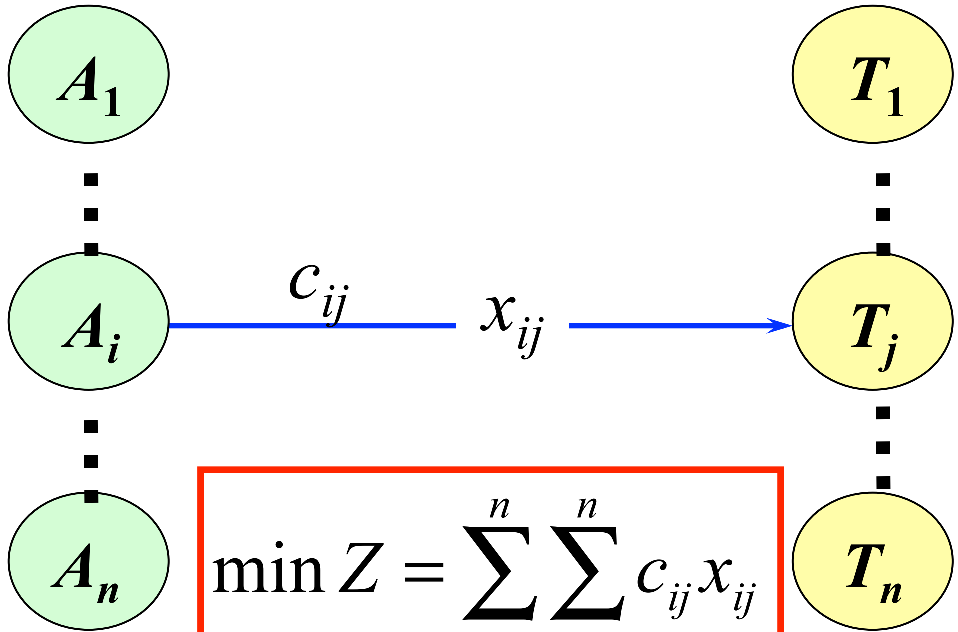
Διατύπωση του προβλήματος σαν Πρόβλημα Μεταφοράς



Προβλήματα Κατανομής

n Άτομα (Assignees)

n Διαδικασίες (Tasks)



$$\boxed{\min Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if assignee } i \text{ performs task } j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1,\ldots,n; j = 1,\ldots,n$$

Προβλήματα Κατανομής: Διατύπωση Γραμμικού Προγραμματισμού

$$\text{Minimize} \qquad Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Subject to:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if assignee } i \text{ performs task } j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, n$$

Προβλήματα Κατανομής: Ιδιότητα Ακέραιας Λύσης

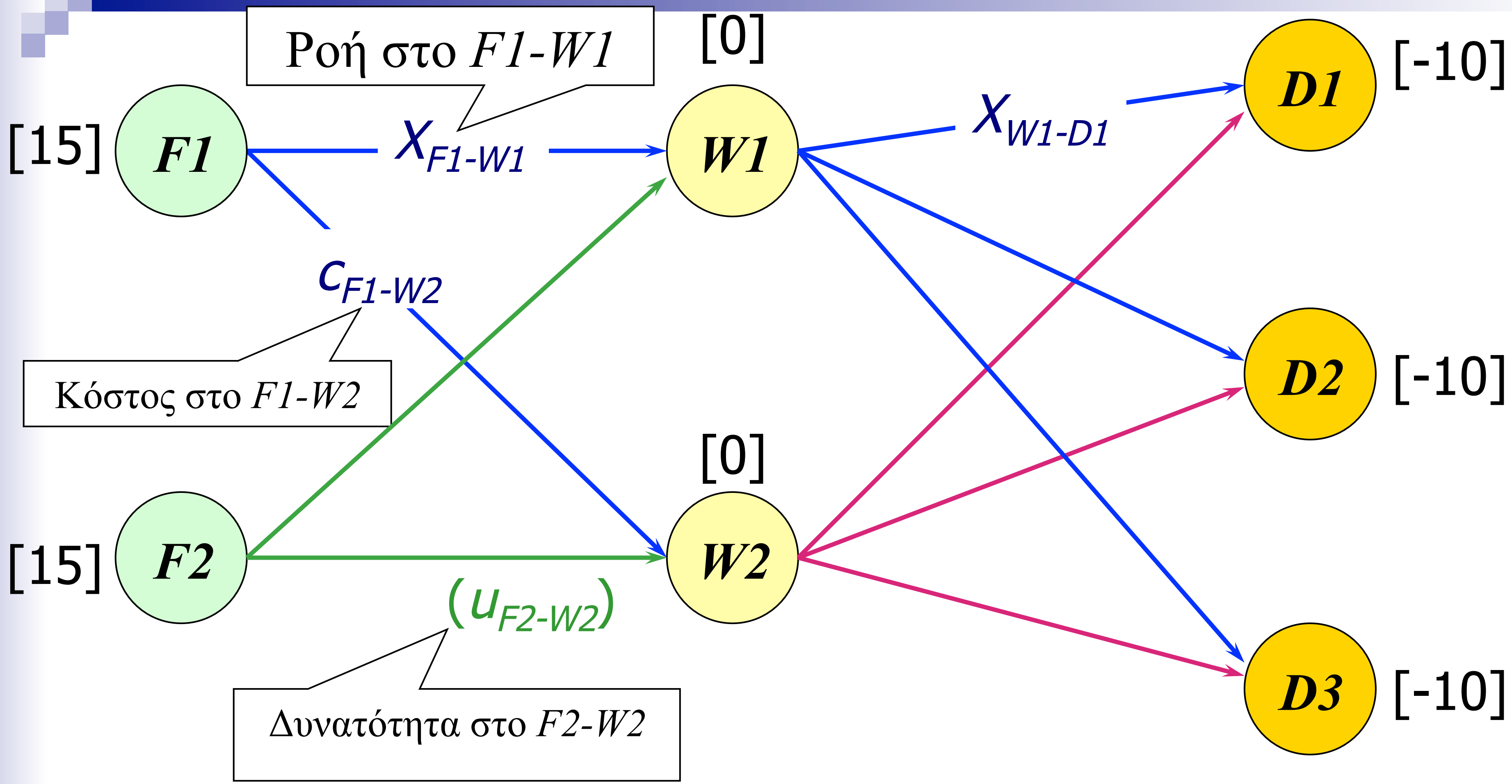
Παραβιάζει μία από τις προϋποθέσεις του ΓΠ

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if assignee } i \text{ performs task } j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- **Ιδιότητα:**
  - Για προβλήματα μεταφοράς, και κατά συνέπεια προβλήματα εκχώρησης, όπου κάθε s_i και d_j έχουν ακέραιες τιμές, όλες οι βασικές μεταβλητές σε κάθε βασική εφικτή λύση παίρνουν **ακέραιες** τιμές.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1,\ldots,n \qquad x_{ij} \geq 0, i = 1,\ldots,n; j = 1,\ldots,n$$

Γενική Μορφή Προβλημάτων Μεταφοράς



Παροχή **Μεταφόρτωση** **Ζήτηση**

Πρόβλημα Παραγωγής

- Η εταιρεία μπορεί να παράγει μέχρι 100 κομμάτια κάθε περίοδο.
- Το κόστος παραγωγής κάθε περιόδου είναι p_i (i είναι η περίοδος).
- Η ζήτηση κάθε περιόδου είναι d_i.
- Το αποθηκευτικό κόστος κάθε περιόδου είναι s.
- Υπολογίστε το πρόγραμμα της εταιρείας έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος παραγωγής για τις επόμενες 3 περιόδους.
- Υποθέστε πως αρχικά δεν υπάρχει απόθεμα.