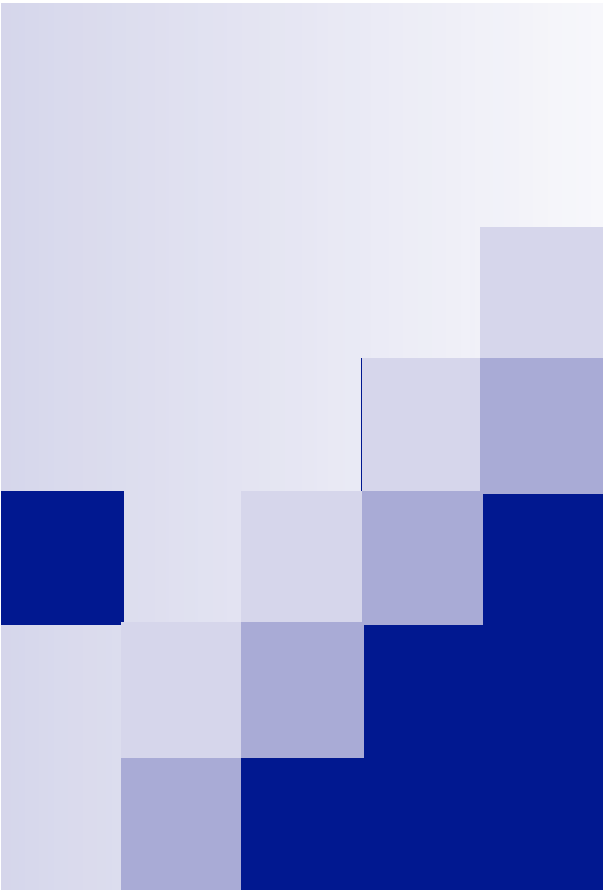
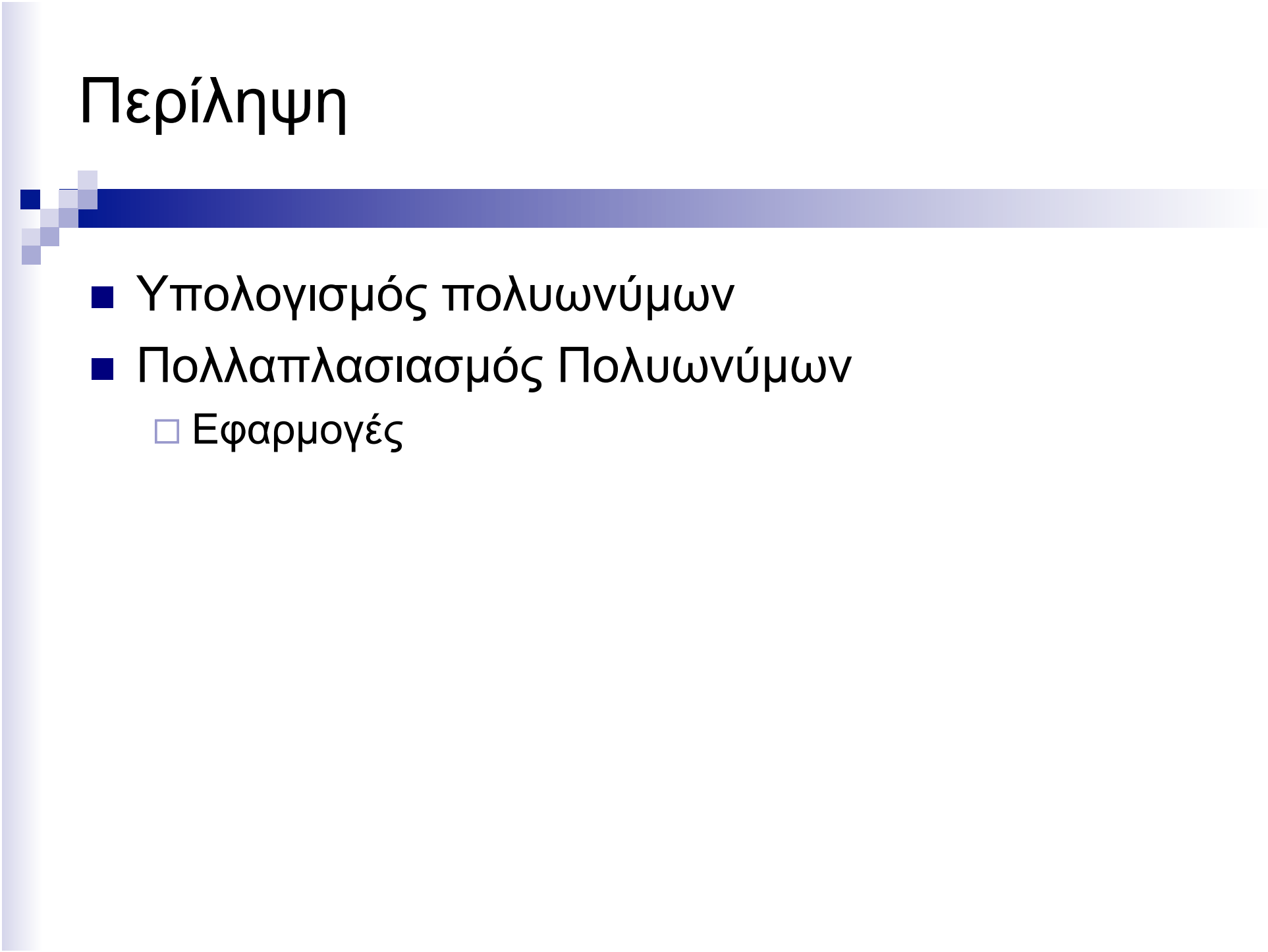




Discrete Fourier Transforms

Περίληψη



- Υπολογισμός πολυωνύμων
- Πολλαπλασιασμός Πολυωνύμων
 - Εφαρμογές

Υπολογισμός Πολυωνύμου

- Σχεδιάστε ένα αλγόριθμο για τον υπολογισμό του πολυωνύμου $p(x)$ για όλες τις τιμές του x .

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

BruteForce1(A[0...n], x)

```
sum= 0;  
for i= n to 0  
    p=1;  
    for j=1 to i p= p*x;  
    sum= sum + A[i]*p;  
return sum;
```

BruteForce2(A[0...n], x)

```
sum= A[0];  
p=1;  
for i= 1 to n  
    p=p*x;  
    sum= sum + A[i]*p;  
return sum;
```

Υπολογισμός Πολυωνύμου: Horner's Rule

- Απλά αναδιοργανώστε τους όρους του πολυωνύμου.

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Υπολογισμός Πολυωνύμου: Horner's Rule

```
Horner(A[0...n], x)
```

```
  p = A[n];
```

```
  for i = n-1 to 0
```

```
    p = x*p + A[i];
```

```
  return p;
```

- **Παράδειγμα:** Για $x=3$ Υπολογίστε το πολυώνυμο

$$p(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 + x - 5$$

A[n]	2	-1	3	1	-5
p					

Πολλαπλασιασμός Πολυωνύμων

- Υποθέστε ότι θέλετε να πολλαπλασιάσετε πιο κάτω πολυώνυμα βαθμού.

$$A(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$$

$$B(x) = 5x^3 + 6x^2 + 7x + 8$$

- Υπολογίστε

$$C(x) = A(x) * B(x) =$$

$$\begin{bmatrix} 32 & 28 & 24 & 20 \\ 24 & 21 & 18 & 15 \\ 16 & 14 & 12 & 10 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιασμός Πολυωνύμων

- Υποθέστε ότι θέλετε να πολλαπλασιάσετε δύο πολυώνυμα βαθμού $(n-1)$.
- Σχεδιάστε ένα αλγόριθμο που να λύνει **αποδοτικά** το πιο πάνω.
- Συγκεκριμένα, δεδομένων των

$$A(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \quad B(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$$

- Υπολογίστε

$$C(x) = A(x) * B(x) = \sum_{i=0}^{2n-2} c_i x^i$$

Λύση Brute-Force

$$A(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

$$B(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$$

$$C(x) = \sum_{i=0}^{2n-2} c_i x^i$$

$$c_k = \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j < n}} a_i b_j$$

$$\begin{bmatrix} a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & a_0 b_3 & a_0 b_{n-1} \\ a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & & a_1 b_{n-1} \\ a_2 b_0 & a_2 b_1 & & & \\ a_3 b_0 & & & & \\ & & & & a_{n-1} b_{n-1} \end{bmatrix}$$

Πιθανή Εναλλακτική Λύση

- Να υπολογιστούν τα πολυώνυμα $A(x)$ και $B(x)$ για κάποιες τιμές το x , π.χ., $x_1, \dots, x_{2n}$.
- Να υπολογιστεί το γινόμενο $C(x)=A(x)*B(x)$ για όλες τις τιμές $x_1, \dots, x_{2n}$.
- Από τις τιμές αυτές να βρούμε το ζητούμενο πολυώνυμο!

Συντελεστές Πολυωνύμων και Τιμές Πολυωνύμων

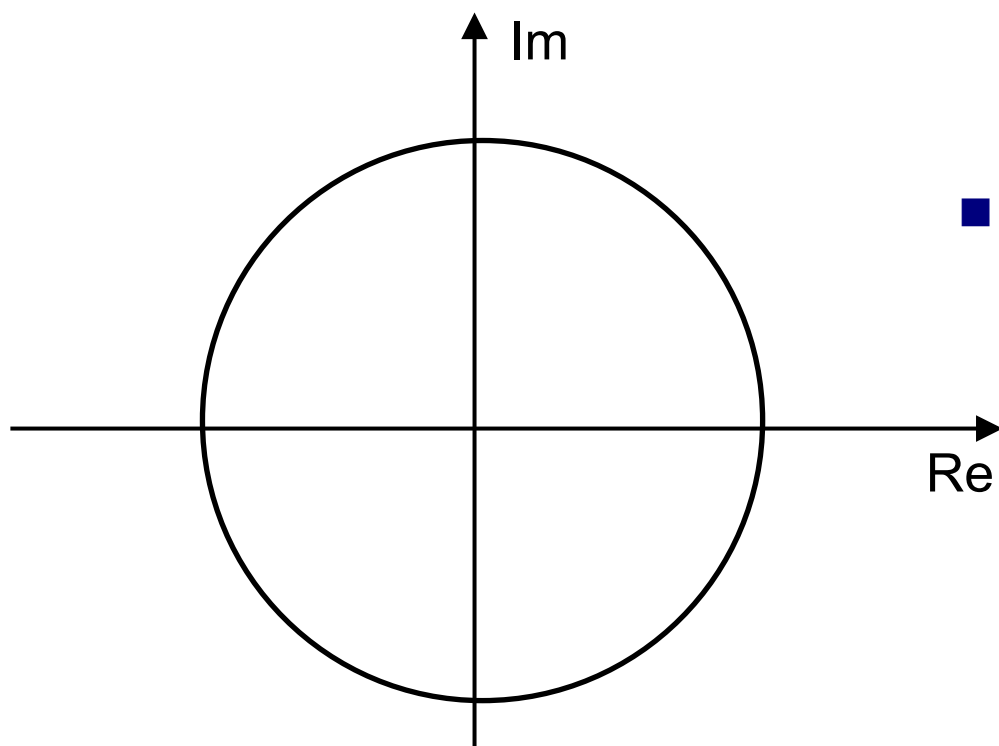
- Υποθέστε το πολυώνυμο

$$A(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

- Δεδομένου ότι το πολυώνυμο παίρνει τις ακόλουθες τιμές
 - ☐ για $x=-1$, $A(-1)=1$
 - ☐ για $x=0$, $A(0)=0$
 - ☐ για $x=1$, $A(1)=1$
- Με τις πιο πάνω τιμές το πολυώνυμο ορίζεται επακριβώς!

Υπολογισμός της τιμής ενός πολυωνύμου

- Υποθέστε ότι θέλετε να υπολογίσετε τη τιμή ενός πολυωνύμου σε όλες τις ρίζες της εξίσωσης



- Επαλήθευση:

Ιδιότητες της ρίζας ω_n

- Ορισμός: $\omega_n = e^{j\frac{2\pi}{n}}$

- Απλοποίηση: $\omega_{2n}^2 = \omega_n$

$$\omega_{2n}^2 = \left(e^{j\frac{2\pi}{2n}} \right)^2 = e^{j\frac{2\pi}{n}} = \omega_n$$

- Για n ζυγό ισχυεί:

$$\omega_n^{n/2} = \omega_2 = -1$$

Υπολογισμός της τιμής ενός πολυωνύμου

- Θέλουμε να υπολογίσουμε τη τιμή ενός πολυωνύμου $A(x)$ στις $2n$ τιμές

$$\omega_i = e^{j\frac{2\pi i}{2n}}, i = 0, \dots, 2n-1$$

$$A(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x^1 + a_0$$

- Χρησιμοποιώντας divide-and-conquer για τον υπολογισμό της τιμής ενός πολυωνύμου (υποθέστε ότι n άρτιο).

$$A_{odd}(x) = a_{n-1}x^{\frac{n}{2}-1} + \dots + a_3x + a_1$$

$$A_{even}(x) = a_{n-2}x^{\frac{n}{2}-1} + \dots + a_2x + a_0$$

- Οπότε

Παράδειγμα

- Υποθέστε πώς

$$A(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

- Αυτό μπορεί να «σπάσει» σε

- Οπότε

Υπολογισμός της τιμής ενός πολυωνύμου

- Εξ' αιτίας της χρήσης του divide-and-conquer, μπορέσαμε να σπάσουμε ένα πολυώνυμο σε δύο «μισά»

$$A(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x^1 + a_0$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Θέλουμε να υπολογίσουμε τις τιμές του $A(x)$

$$A(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

στις ρίζες της εξίσωσης

- Για τον υπολογισμό χρειαζόμαστε **μόνο** τα τετράγωνα!

Από αυτά **μόνο** τα μισά είναι μοναδικά, τα άλλα μισά επαναλαμβάνονται!

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Δηλαδή θα πρέπει να υπολογίσουμε τα

$$A_{odd}(x) = ax + c \qquad A_{even}(x) = bx + d$$

μόνο στις τιμές

$$\omega_4^k = e^{j\frac{2\pi k}{4}}, k = 0, \dots, 3$$

Και στη συνέχεια να υπολογίσουμε τις τιμές για όλες τις ρίζες

$$A(\omega_8^4) = A_{even}(\omega_4^0) + \omega_8^4 A_{odd}(\omega_4^0)$$

$$A(\omega_8^5) = A_{even}(\omega_4^1) + \omega_8^5 A_{odd}(\omega_4^1)$$

$$A(\omega_8^2) = A_{even}(\omega_4^2) + \omega_8^2 A_{odd}(\omega_4^2) \qquad A(\omega_8^6) = A_{even}(\omega_4^2) + \omega_8^6 A_{odd}(\omega_4^2)$$

$$A(\omega_8^3) = A_{even}(\omega_4^3) + \omega_8^3 A_{odd}(\omega_4^3) \qquad A(\omega_8^7) = A_{even}(\omega_4^3) + \omega_8^7 A_{odd}(\omega_4^3)$$

Απόδοση Αλγορίθμου

- Σπάσαμε ένα πρόβλημα υπολογισμού ενός πολυωνύμου βαθμού $n-1$ για n διαφορετικές τιμές σε πρόβλημα υπολογισμού δύο πολυωνύμων βαθμού $n/2-1$ τα οποία θα πρέπει να υπολογιστούν σε μόνο $n/2$ διαφορετικές τιμές.

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + f(n)$$

- Ο χρόνος «επανασύνδεσης» είναι σταθερός για κάθε x , (δεν εξαρτάτε από το n) οπότε για n λύσεις, ο επιπρόσθετος χρόνος είναι $O(n)$ ($f(n) = O(n)$). Οπότε αν

Πιθανή Εναλλακτική Λύση

- Να υπολογιστούν τα πολυώνυμα $A(x)$ και $B(x)$ για κάποιες τιμές το x , π.χ., $x_1, \dots, x_{2n}$.
- Να υπολογιστεί το γινόμενο $C(x)=A(x)*B(x)$ για όλες τις τιμές $x_1, \dots, x_{2n}$.
- Από τις τιμές αυτές να βρούμε το ζητούμενο πολυώνυμο!

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (Discrete Fourier Transform (DFT))

- Υποθέστε πως έχετε n δείγματα από κάποιο σήμα (π.χ. φωνής). Δηλαδή έχετε τα δείγματα $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$.
- Υποθέστε πως θέλετε να υπολογίσετε τη σειρά
- Χρησιμοποιώντας brute-force χρειάζεστε $O(n^2)$ πολλαπλασιασμούς ενώ με τη μέθοδο που έχουμε δει μόνο $O(n \log n)$

Υπολογισμός ενός πολυωνύμου από τις $2n$ τιμές

- Μέχρι τώρα έχουμε βρει τις τιμές που παίρνει το $C(x)$ για όλες τις λύσεις της εξίσωσης

$$x^{2n} = 1 \Rightarrow x_i = \omega_{2n}^i = e^{j\frac{2\pi i}{2n}}, i = 0, \dots, 2n-1$$

- Οπότεν μπορούμε να γράψουμε $2n$ εξισώσεις με $2n-1$ αγνώστους
- Ορίζουμε ένα νέο πολυώνυμο

Υπολογισμός ενός πολυωνύμου από τις $2n$ τιμές

- Στην συνέχεια υπολογίζουμε το $D(y)$ για όλες τις τιμές

$$y_i = \omega_{2n}^i = e^{j\frac{2\pi i}{2n}}, i = 0, \dots, 2n-1$$

- Για μια περίπτωση

$$\begin{aligned} D(\omega_{2n}^i) &= \sum_{m=0}^{2n-1} \left(\sum_{k=0}^{2n-2} c_k \omega_{2n}^{mk} \right) \omega_{2n}^{mi} = \sum_{k=0}^{2n-2} \sum_{m=0}^{2n-1} c_k \omega_{2n}^{mk} \omega_{2n}^{mi} \\ &= \sum_{k=0}^{2n-2} c_k \sum_{m=0}^{2n-1} \omega_{2n}^{mk} \omega_{2n}^{mi} = \sum_{k=0}^{2n-2} c_k \sum_{m=0}^{2n-1} e^{j\frac{2\pi mk}{2n}} e^{j\frac{2\pi mi}{2n}} \\ &= \sum_{k=0}^{2n-2} c_k \sum_{m=0}^{2n-1} e^{j\frac{2\pi (k+i)m}{2n}} \end{aligned}$$

Υπολογισμός ενός πολυωνύμου από τις $2n$ τιμές

- Παρατήρηση

$$(x^{2n} - 1) = (x - 1) \left(\sum_{m=0}^{2n-1} x^m \right)$$

- Εξ ορισμού, $y_i = x_i = \omega_{2n}^i$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^{2n} - 1 = 0$, οπότε για όλες τις ρίζες $x_i \neq 1$, $i = 1, \dots, 2n-1$ πρέπει να ισχύει ότι

$$\sum_{m=0}^{2n-1} \omega_{2n}^m = \sum_{m=0}^{2n-1} e^{j \frac{2\pi i}{2n} m} = 0, \quad i = 1, \dots, 2n-1$$

- Οπότε, στον υπολογισμό του $D(x)$, οι περισσότεροι όροι απλοποιούνται!

$$D(\omega_{2n}^i) = \sum_{k=0}^{2n-2} c_k \sum_{m=0}^{2n-1} e^{j \frac{2\pi(k+i)m}{2n}}$$

Υπολογισμός ενός πολυωνύμου από τις $2n$ τιμές

$$D(\omega_{2n}^i) = \sum_{k=0}^{2n-2} c_k \sum_{m=0}^{2n-1} e^{j \frac{2\pi(k+i)m}{2n}}, \quad i = 1, \dots, 2n$$

$$D(\omega_{2n}^2) = 2nc_{2n-2} \Rightarrow c_{2n-2} = \frac{1}{2n} D(\omega_{2n}^2)$$

$$D(\omega_{2n}^3) = 2nc_{2n-3} \Rightarrow c_{2n-3} = \frac{1}{2n} D(\omega_{2n}^3)$$

$$D(\omega_{2n}^i) = 2nc_{2n-i} \Rightarrow c_{2n-i} = \frac{1}{2n} D(\omega_{2n}^i)$$

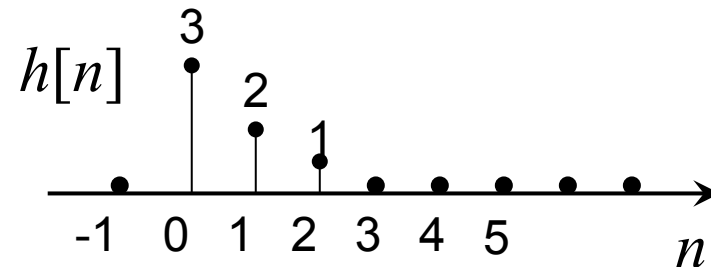
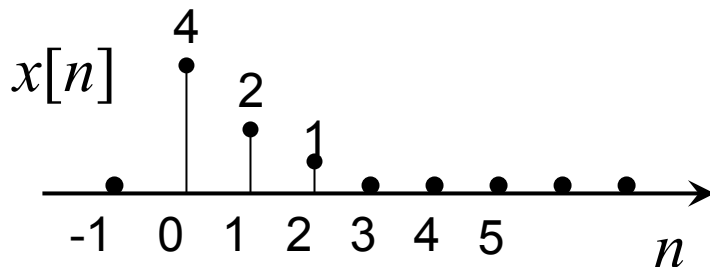
- Δηλαδή, οι ζητούμενοι συντελεστές μπορούν να υπολογιστούν εάν υπολογίσουμε το πολυώνυμο $D(x)$ στις ρίζες της εξίσωσης $x^{2n}-1=0$ για το οποίο μόλις βρήκαμε αλγόριθμο ο οποίος το υπολογίζει σε χρόνο

Πιθανή Εναλλακτική Λύση

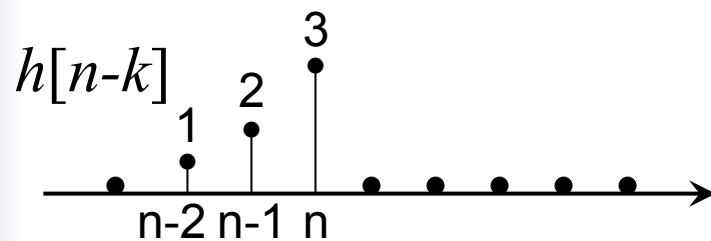
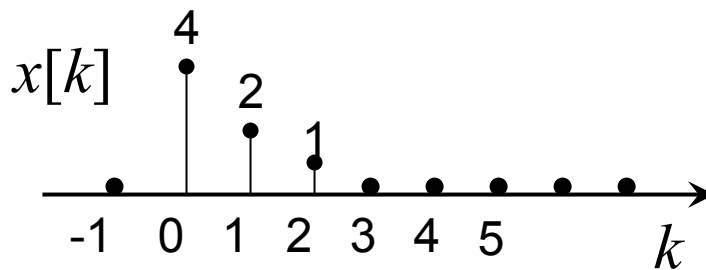
- Να υπολογιστούν τα πολυώνυμα $A(x)$ και $B(x)$ για κάποιες τιμές το x , π.χ., $\omega_{2n}^0, \dots, \omega_{2n}^{2n-1}$.
- Να υπολογιστεί το γινόμενο $C(x)=A(x)*B(x)$ για όλες τις τιμές $\omega_{2n}^0, \dots, \omega_{2n}^{2n-1}$.
- Από τις τιμές αυτές να βρούμε το ζητούμενο πολυώνυμο!

Συνολικά:

Συνέλιξη (convolution)

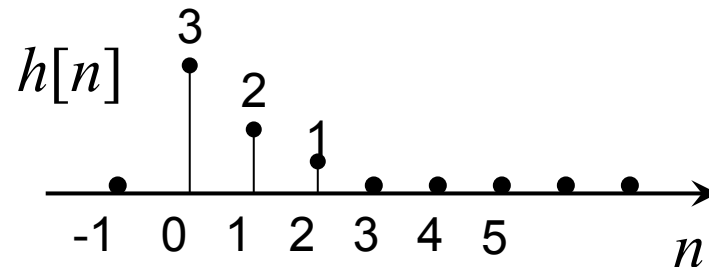
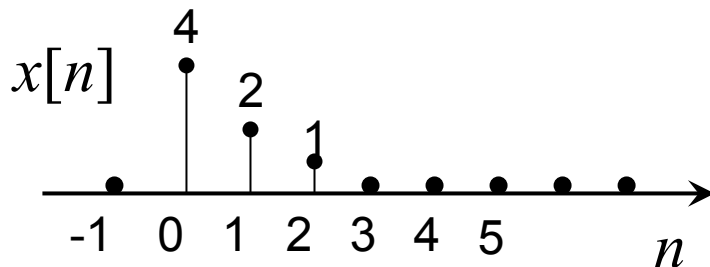


$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$



$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Συνέλιξη (convolution)



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

- Υποθέστε ότι δύο σήματα έχουν από 10,000 σημεία (samples).
- Υποθέστε επίσης πως ένας πολλαπλασιασμός χρειάζεται 1 μsec .
- Χρησιμοποιώντας brute force χρειαζόμαστε χρόνο της τάξης των 100 sec
- Χρησιμοποιώντας DFT χρειαζόμαστε χρόνο της τάξης 0.04 sec!!