

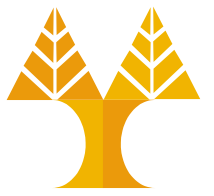


HMY 370

Εισαγωγή στη Βιοϊατρική Μηχανική

Μια Συστημική Προσέγγιση της Φυσιολογίας

Τι είναι φυσιολογία;



- **Φυσιολογία (φύση + μελέτη):**

- Μελέτη των λειτουργιών του σώματος που το διατηρούν σε ζωή
- Κύτταρα → ιστοί → όργανα → συστήματα οργάνων → οργανισμοί

- **Ανθρώπινη φυσιολογία:**

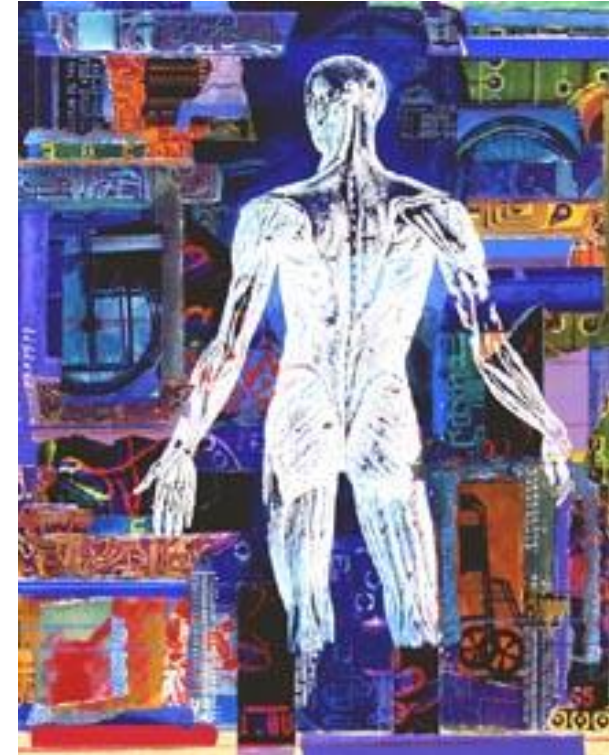
- Η ενασχόληση με φυσιολογικά φαινόμενα ζωής του ανθρώπινου σώματος

- **Στόχος της φυσιολογίας:**

- Να εξηγήσει τις διαδικασίες που είναι υπεύθυνες για την προέλευση, την ανάπτυξη και την εξέλιξη της ζωής.

- **Γιατί μελετάμε φυσιολογία;**

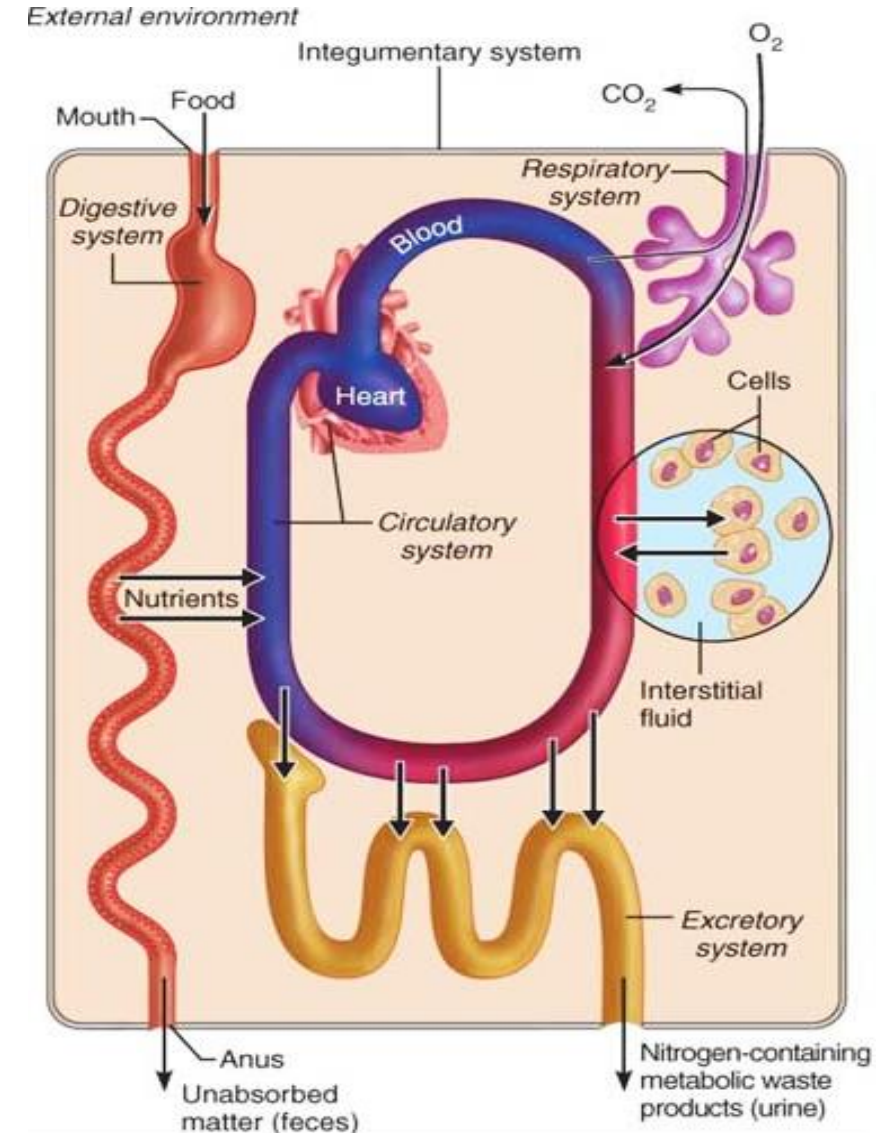
- Για να κατανοήσουμε την κανονική λειτουργία, προκειμένου να θεραπεύσουμε τις ασθένειες



Η αλληλεπίδραση μεταξύ συστημάτων



- Πολυπλοκότητα λόγω αλληλεπίδρασης μεταξύ συστημάτων
- Παράδειγμα
 - Οξεοβασική Ισορροπία → σταθερό pH
 - Αναπνευστικό
 - Κυκλοφοριακό
 - Αίμα
 - Ουροποιητικό
 - Γαστρεντερικό

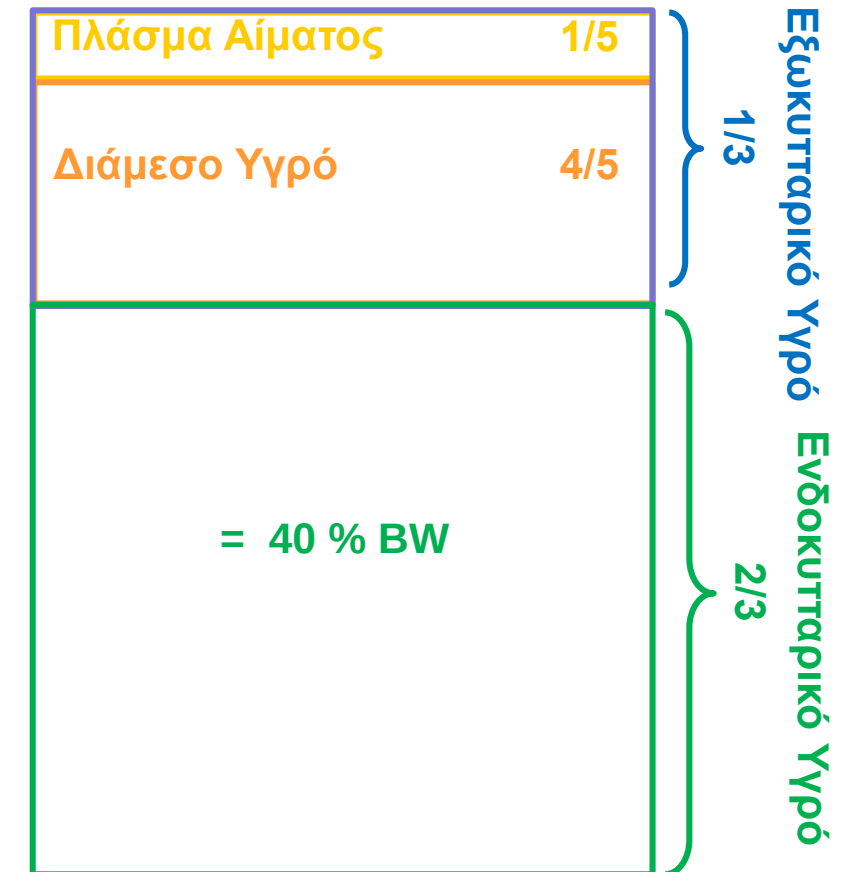
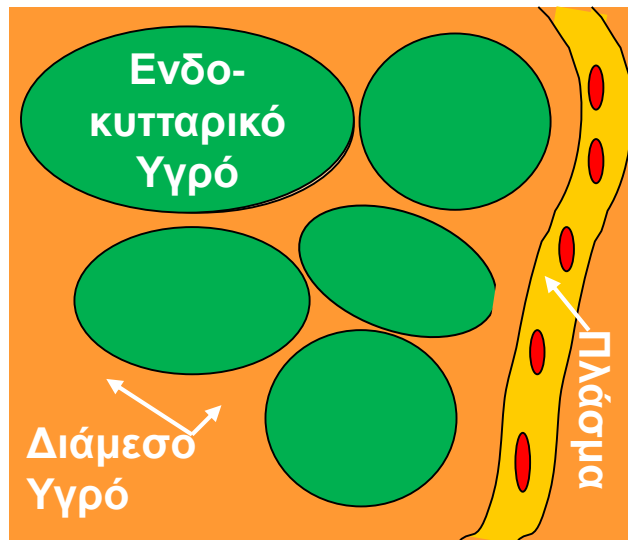


Εσωτερικό Περιβάλλον



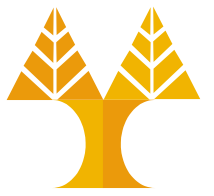
• Υδατώδες εσωτερικό περιβάλλον

- Διατηρείται σταθερό ώστε να συντηρείται η σωστή λειτουργία και η ζωή
- Ενδοκυτταρικό (intracellular) υγρό (ICF)
 - Το ρευστό μέσα στα κύτταρα
- Εξωκυττάρικό (extracellular) υγρό (ECF)
 - Το ρευστό έξω από τα κύτταρα
 - Διάμεσο (interstitial) υγρό (μεταξύ των κυττάρων)
 - Πλάσμα (plasma) (στα αιμοφόρα αγγεία)

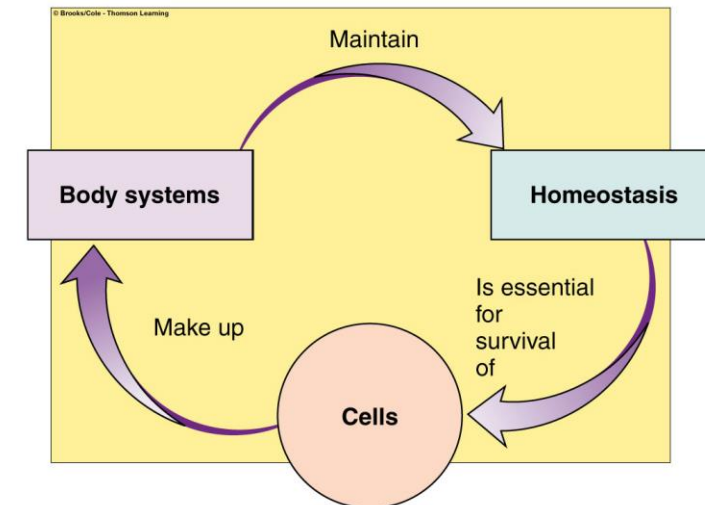
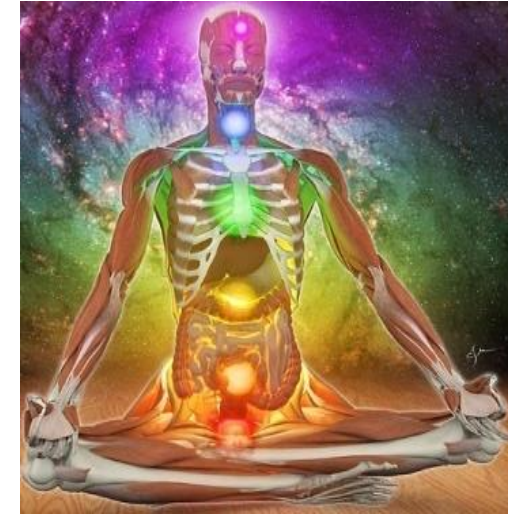


Ολικό Νερό Σώματος
= 60 % ΒΣ (BW)

Ομοιόσταση (Homeostasis)



- **Διατήρηση σχετικά σταθερής χημικής / φυσικής κατάσταση στο εσωτερικό περιβάλλον.**
 - Claude Bernard (Ο πατέρας της σύγχρονης Φυσιολογίας)
 - *Το εσωτερικό περιβάλλον παραμένει σχετικά σταθερό έστω και αν υπάρχουν αλλαγές στο εξωτερικό περιβάλλον*
- **Σταθερό ≠ Αμετακίνητο**
 - Μπορεί να μεταβάλλεται μέσα σε στενά όρια (φυσιολογικό εύρος)
 - Δυναμική κατάσταση
 - Εξωτερικές διαταραχές
 - Βραχυπρόθεσμες παροδικές αποκρίσεις ή μακροπρόθεσμη προσαρμογή
 - Επιστροφή στην σταθερή κατάσταση
- **Ο απώτερος στόχος του κάθε οργάνου:**
 - Διατήρηση της ομοιόστασης
 - Με συστήματα ελέγχου



Ομοιόσταση (Homeostasis)



- **Ελεγχόμενες Παράμετροι**

- Συγκέντρωση θρεπτικών μορίων
- Συγκέντρωση O₂ και CO₂
- Συγκέντρωση αποβλήτων
- pH
- Συγκέντρωση νερού, άλατος, και άλλων ηλεκτρολυτών
- Όγκος και Πίεση αίματος
- Θερμοκρασία

- **Στο αίμα (μετά από νηστεία)**

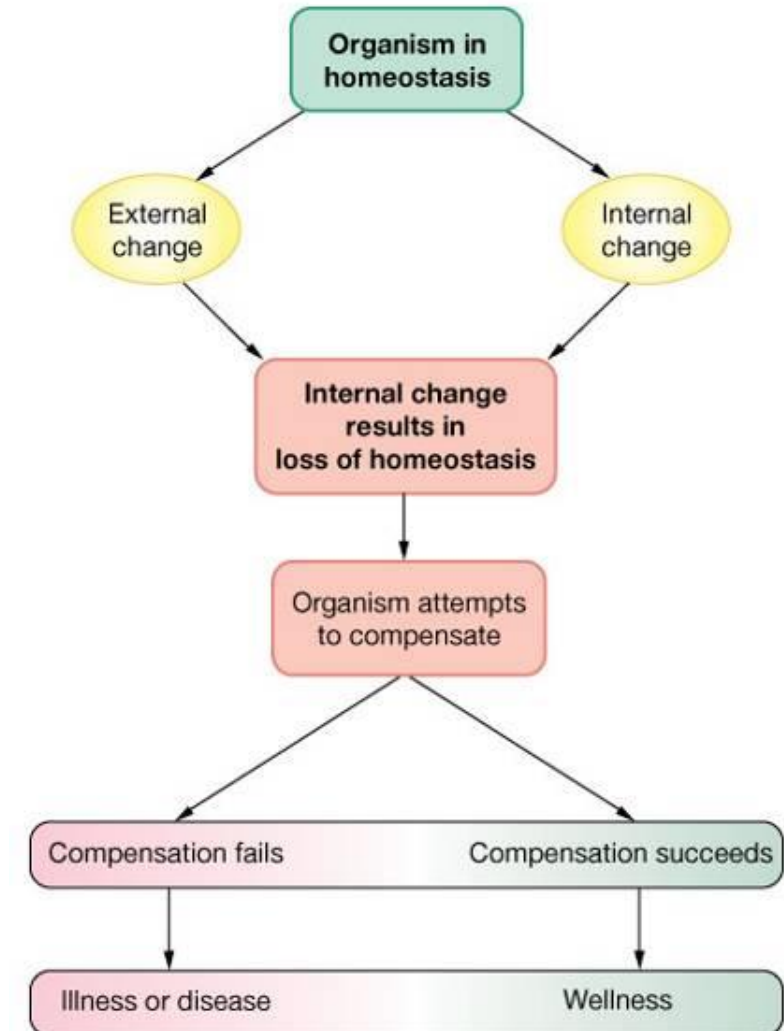
- Αρτηριακό (Arterial pH) 7.35-7.45
- Διττανθρακικό (Bicarbonate) 24-28 mEq/L
- O₂ στο αίμα 17.2-22 ml/100 ml
- Λιπίδια (ολικό) 400-800 mg/100 ml
- Γλυκόζη (Glucose) 75-110 mg/100 ml

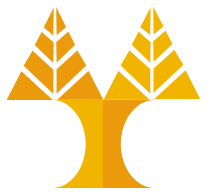
- **Επιτυχής διόρθωση**

- Αποκαθίσταται η ομοιόσταση

- **Ανεπιτυχής διόρθωση**

- Παθοφυσιολογία → Ασθένεια ή Θάνατος





- **Ρύθμιση (Regulation)**

- Η ικανότητα ενός οργανισμού να διατηρεί σταθερές τις εσωτερικές συνθήκες σε ένα διαρκώς μεταβαλλόμενο περιβάλλον

- **Τύποι ρύθμισης:**

- **Χυμική (ορμονική) Ρύθμιση**

- Μία ρυθμιστική διαδικασία που εκτελείται από ορμόνη ή δραστική χημική ουσία που εκκρίνεται στο αίμα ή σε ιστό.
- Αργή απόκριση, δρα εκτενώς και διαρκεί για μεγάλο χρονικό διάστημα.

- **Νευρική Ρύθμιση**

- Μία ρυθμιστική διαδικασία στην οποία οι λειτουργίες του σώματος ελέγχονται από το νευρικό σύστημα
- Γρήγορη απόκριση, δρα ακριβώς ή σε τοπικό επίπεδο, διαρκεί για σύντομο χρονικό διάστημα

- **Αυτορρύθμιση**

- Ένας ιστός ή ένα όργανο ανταποκρίνεται άμεσα στις περιβαλλοντικές αλλαγές ανεξάρτητα από τον νευρικό ή / και ορμονικό έλεγχο
- Το εύρος και η έκταση του αποτελέσματος είναι μικρότερη από τα άλλα δύο είδη.

- **Στο ανθρώπινο σώμα οι τρεις αυτοί μηχανισμοί συντονίζονται και δρουν ως ένα σύστημα**

- “Σύστημα ελέγχου ανάδρασης”

Συστήματα Ελέγχου (Control Systems)

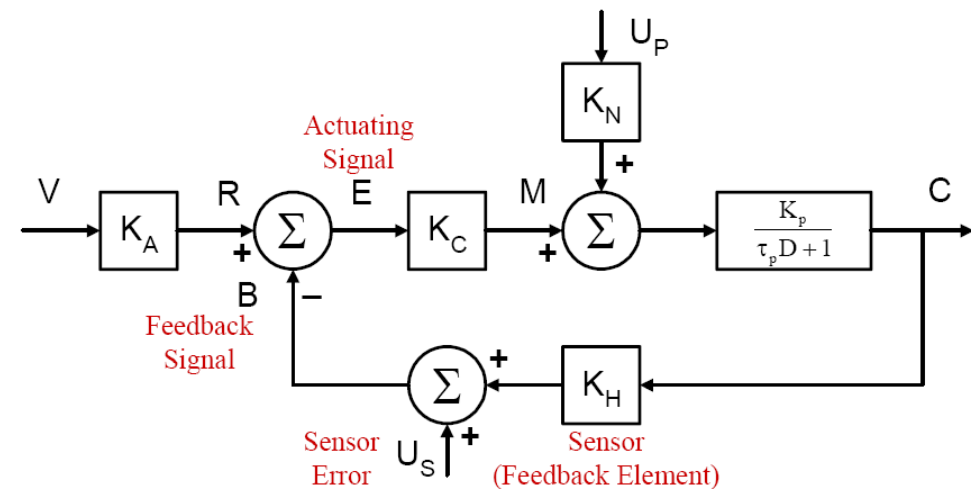
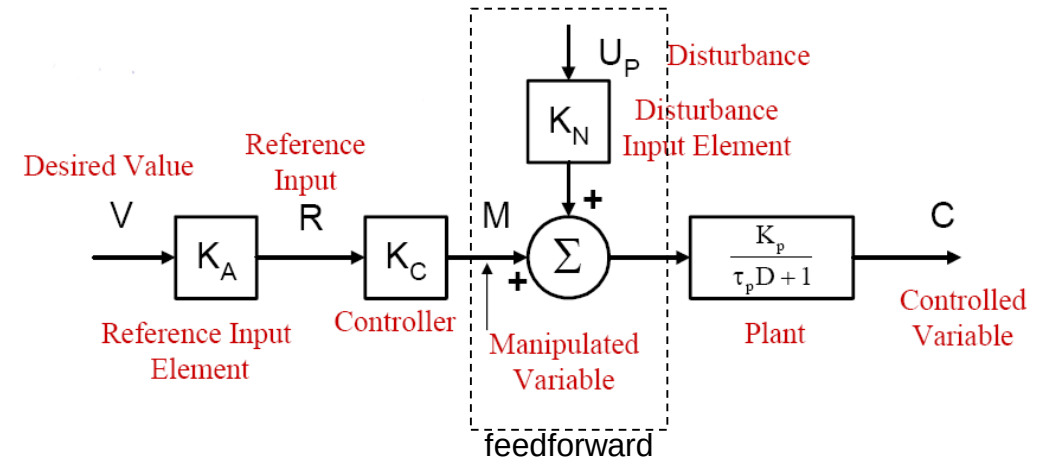


- **Παθητικός έλεγχος**

- Σύστημα ανοιχτού βρόχου
- Σύστημα ανοιχτού βρόχου με πρόδραση (feedforward)

- **Ενεργός έλεγχος (ή κλειστού βρόχου)**

- Έλεγχος με ανάδραση (Feedback)
 - Μια διαδικασία στην οποία ένα μέρος της εξόδου (σήμα ανάδρασης) από το ελεγχόμενο όργανο επιστρέφει για να επηρεάσει ή να τροποποιήσει τη δράση του συστήματος ελέγχου.
- Υπάρχουν δύο τύποι ελέγχου με ανάδραση
 - Έλεγχος με αρνητική ανάδραση (negative feedback)
 - Έλεγχος με θετική ανάδραση (positive feedback)



Συστήματα Ελέγχου (Control Systems)

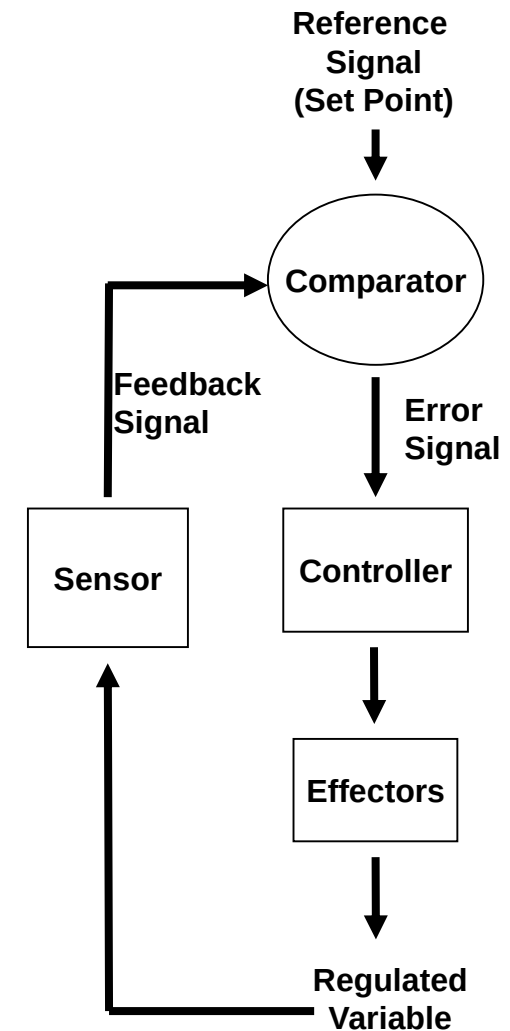


- **Ανάδραση σε βιολογικά συστήματα**

- Όλες οι φυσιολογικές παράμετροι έχουν ένα καθορισμένο σημείο αναφοράς (set-point)
- Αισθητήρας: Ανιχνεύει απόκλιση από το σημείο αναφοράς
- Κέντρο Ελέγχου: Καθορίζει την απόκριση
- Τελεστής: Εκτελεί την απόκριση
- Σημασία:
 - Διατήρηση της ομοιόστασης

- **Αρνητική ανάδραση**

- Αλλαγή σε μια μεταβλητή προκαλεί απόκριση προς την αντίθετη κατεύθυνση
- Τείνει να διορθώσει την αλλαγή και να επαναφέρει το σύστημα σε σταθερή κατάσταση
- Το αποτέλεσμα είναι κυρίως "ανασταλτική δράση"
- Σημασία:
 - Αποτρέπει μικρές αλλαγές από το να γίνουν πάρα πολύ μεγάλες



Συστήματα Ελέγχου (Control Systems)



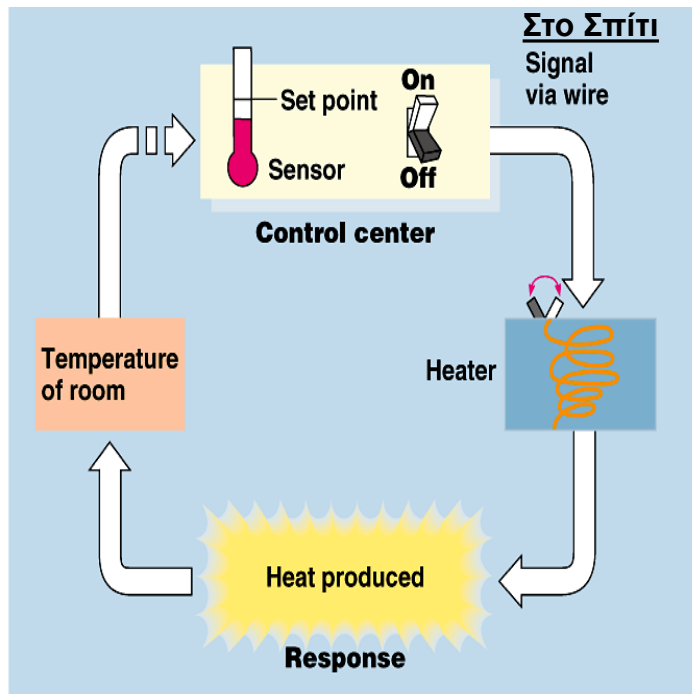
- Παράδειγμα αρνητικής ανάδρασης

- Έλεγχος της Θερμοκρασίας

- Σημείο Αναφοράς (Set point):
 - Αισθητήρας (Sensor):
 - Κέντρο Ελέγχου (Controller):
 - Τελεστής (Effector):

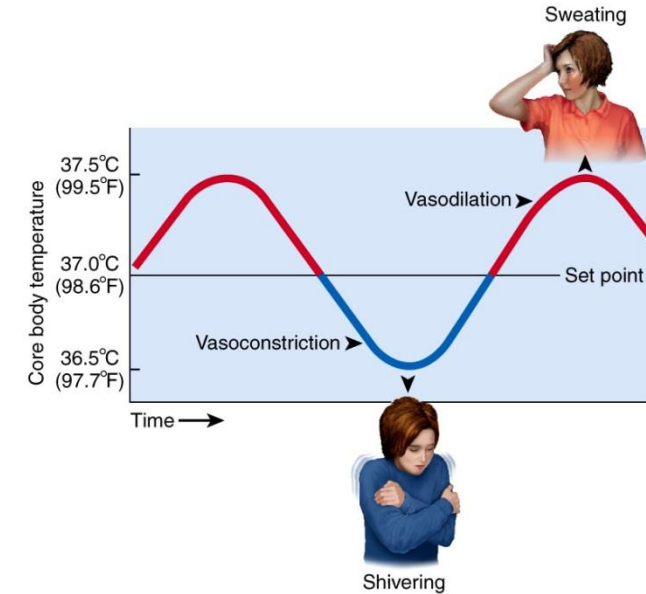
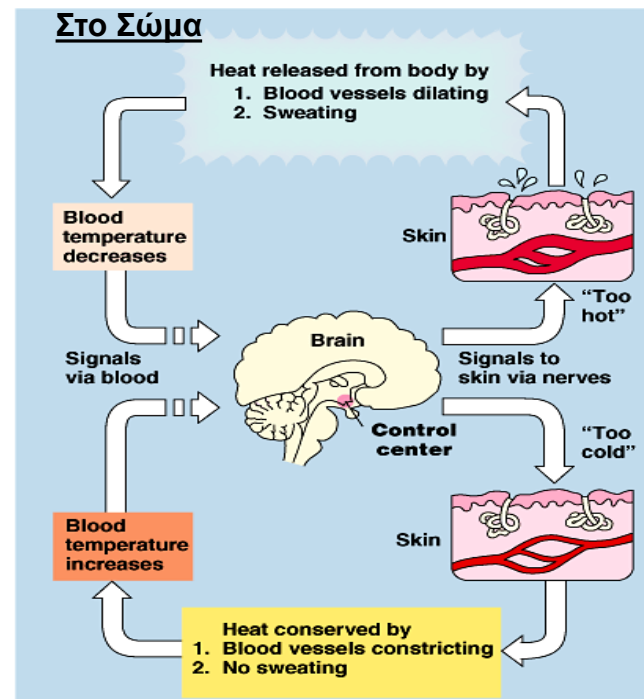
ΣΤΟ ΣΠΙΤΙ

22 °C
Θερμίστορ
Θερμοστάτης
Καυστήρας

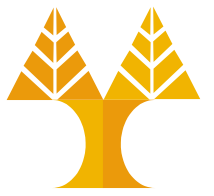


ΣΤΟ ΣΩΜΑ

37 °C
Υποδοχείς Θερμότητας (Υποθάλαμος)
Εγκέφαλος (Υποθάλαμος)
Καρδιαγγειακό, Μυϊκό,
Ιδρωτοποιοί αδένες

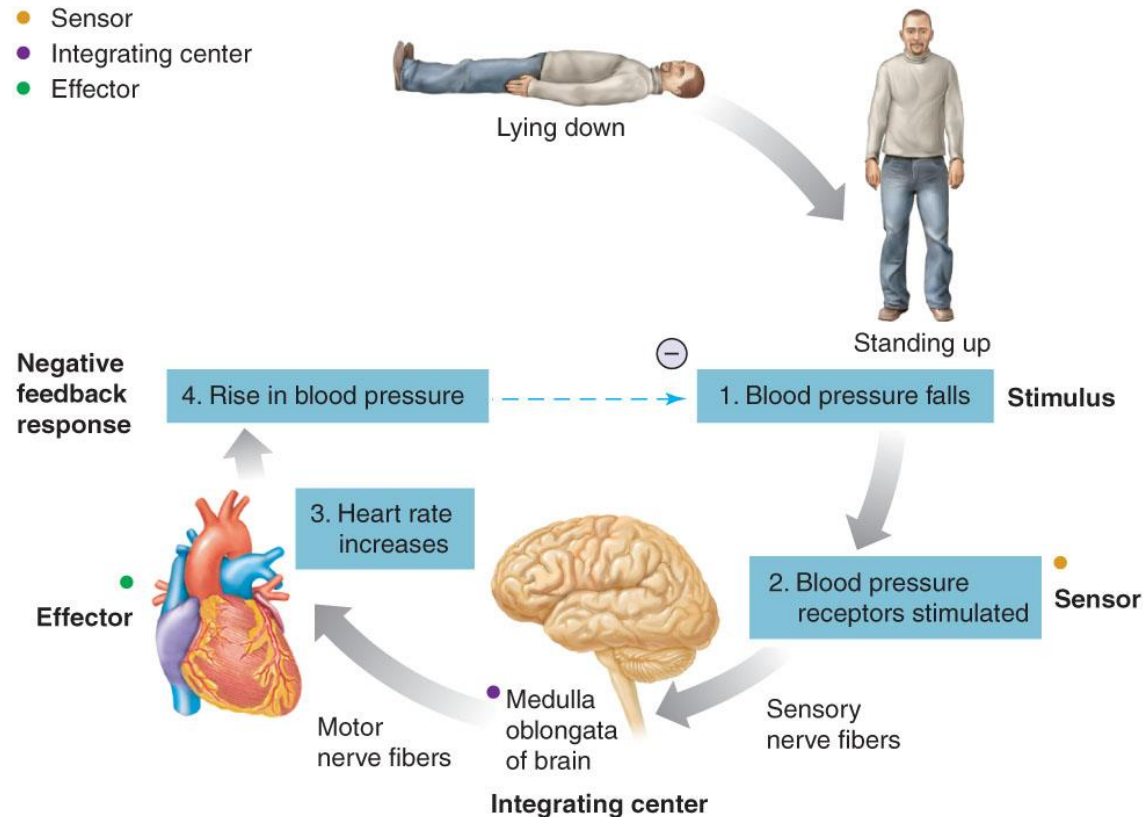


Συστήματα Ελέγχου (Control Systems)

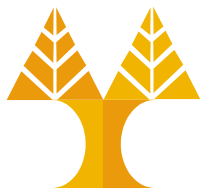


• Παράδειγμα αρνητικής ανάδρασης

- Έλεγχος της πίεσης του αίματος
 - Set point: normal blood pressure
 - Sensor: baroreceptors
 - Integration Center: brain (hypothalamus/brain stem)
 - Effector: heart / arteries

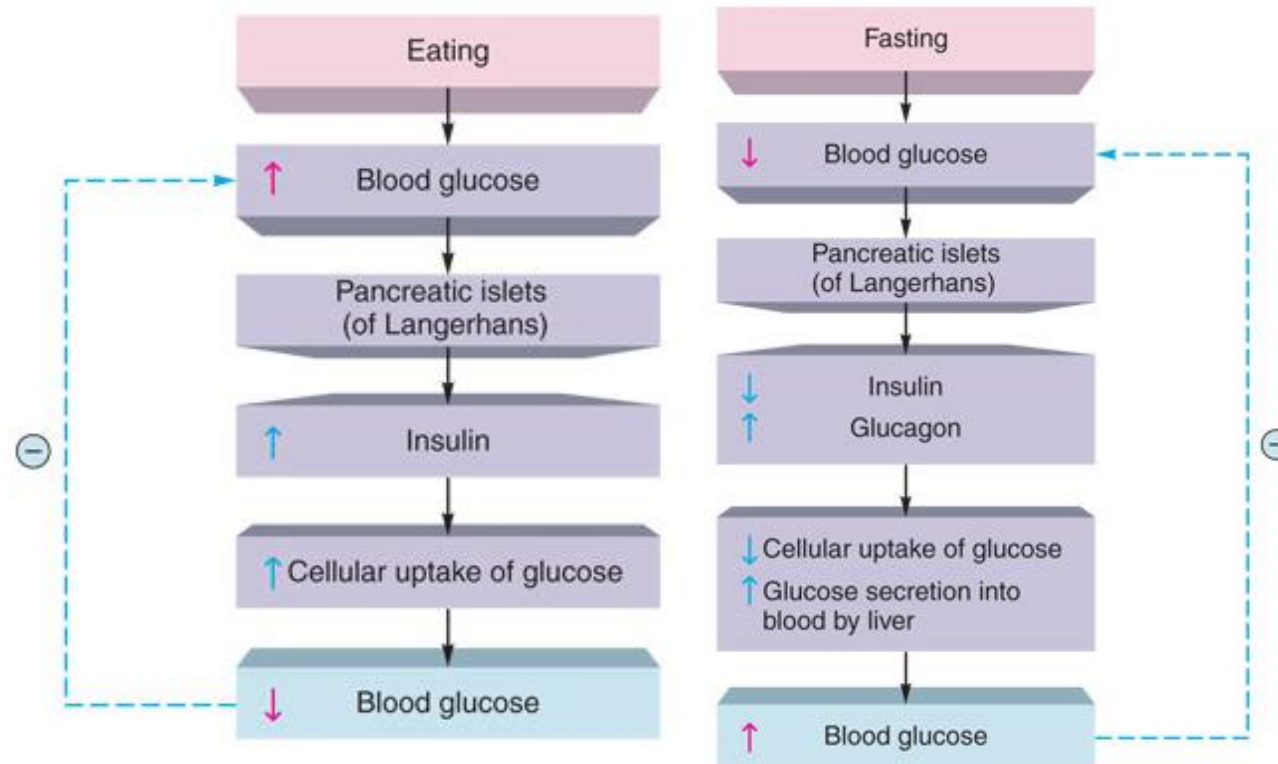


Συστήματα Ελέγχου (Control Systems)



- **Παράδειγμα αρνητικής ανάδρασης**

- Έλεγχος της γλυκόζης στο αίμα
 - Set point: 5 mmol/L
 - Sensor: pancreatic cells
 - Integration: Endocrine system
 - Effector: insulin and glucagon

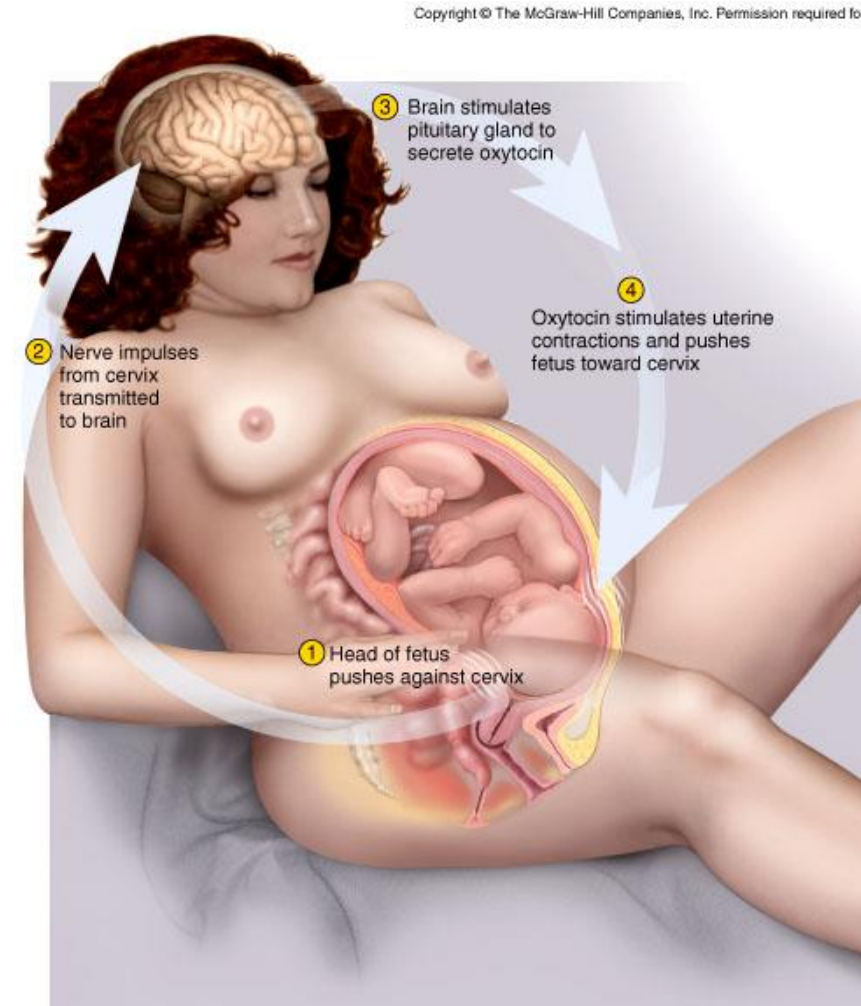


Συστήματα Ελέγχου (Control Systems)

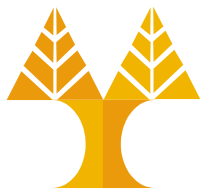


• Θετική Ανάδραση

- Το σήμα ανάδρασης από το ελεγχόμενο σύστημα αυξάνει την δράση του συστήματος
- Σημασία:
 - Ενίσχυση της δράσης του αρχικού ερεθίσματος ή αλλαγής, προώθηση μιας δραστηριότητα προς τον τελικό στόχο
- Ένας φαύλος κύκλος, γιατί μπορεί να οδηγήσει σε αστάθεια ή ακόμη και θάνατο
 - Δεν είναι τόσο κοινή όσο αρνητική ανάδραση
 - Πάντα ένας μηχανισμός παύσης
 - Κάποτε εμφανίζεται όταν μη-φυσιολογικές συνθήκες απενεργοποιούν την αρνητική ανάδραση
- Παραδείγματα:
 - Πήξη του αίματος
 - Ούρηση, αφόδευση
 - Εισροή Na^+ στη γένεση των νευρικών σημάτων
 - Συστολή της μήτρας κατά τον τοκετό

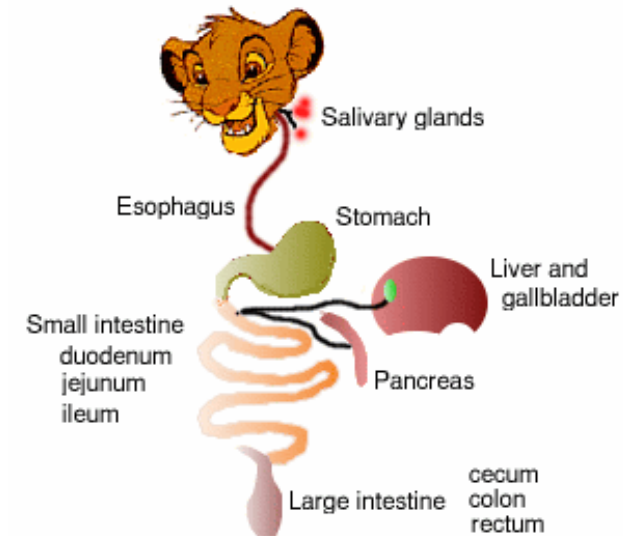


Συστήματα Ελέγχου (Control Systems)



- Έλεγχος με πρόδραση (feedforward)

- Παρακινεί απόκριση εν αναμονή μιας αλλαγής
- Άμεσο αποτέλεσμα πριν από την ενεργοποίηση του συστήματος.
- Σημασία της πρόδρασης
 - Προσαρμοστικός έλεγχος.
 - Επιτρέπει στο ανθρώπινο σώμα να προβλέψει και να προσαρμοστεί στο περιβάλλον έγκαιρα και με ακρίβεια (προετοιμάζει το σώμα για την αλλαγή).
- Παράδειγμα:
 - Ρίγος πριν από την κατάδυση σε κρύο νερό
 - Θέα της τροφής → έκκριση ενζύμων
 - Τροφή στο γαστρεντερικό σωλήνα → έκκρισης ινσουλίνης σε αναμονή της άφιξης της γλυκόζης



Διαταραχή (Perturbation):

Όραση και όσφρηση της τροφής → αναμένεται πρόσληψη τροφή

Πρόδραση:

Έκκριση ενζύμων στο στόμα και το στομάχι

Διαταραχή (Perturbation):

Τροφή στο στομάχι → αναμένεται γλυκόζη στο αίμα

Πρόδραση:

Έκκριση ινσουλίνης από το πάγκρεας



- **Για να κατασκευαστεί ένα διάγραμμα από μια αφήγηση**

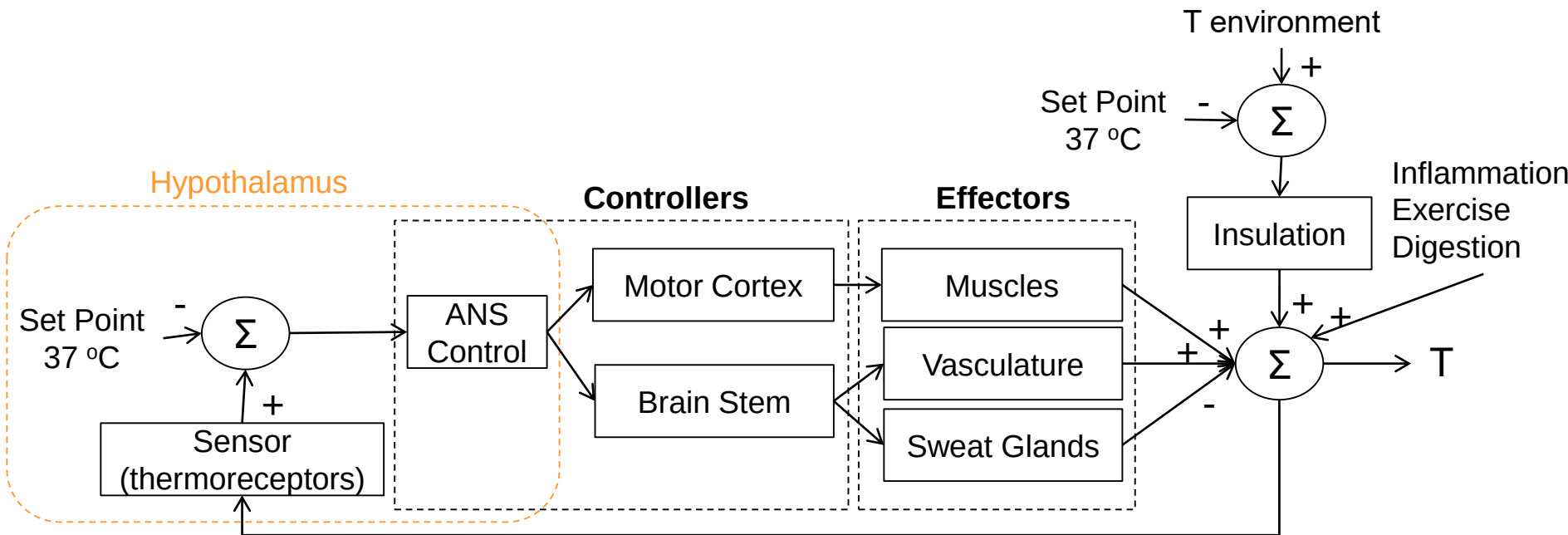
- Προσδιορίστε την ελεγχόμενη μεταβλητή (ες)
- Τι είδους διαταραχές ή εισροές θα κάνουν τις μεταβλητές αποκλίνουν από την ομοιόσταση; Από πού θα προέρχονται;
- Καθορίστε τον αισθητήρα(ες) που ανιχνεύουν την τρέχουσα τιμή της μεταβλητής(ων). Μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία μεταβλητή και αισθητήρες.
- Αν υπάρχουν περισσότερες από μία μεταβλητές ή/και τον αισθητήρες, υπάρχουν περισσότεροι από ένας βρόχοι ανάδρασης που εμπλέκονται; Αν ναι, είναι οποιοιδήποτε από τους βρόγχους θετικής ανάδρασης;
 - Εάν υπάρχουν βρόχοι θετικής ανάδρασης, πώς θα τερματίζονται μέσα από μια συνολικά αρνητική διαδικασία ανατροφοδότησης;
 - Υπάρχουν βραχυπρόθεσμοι και μακροπρόθεσμοι έλεγχοι; Προσδιορίστε τους.
- Πού βρίσκονται οι αισθητήρες (π.χ. στο εγκεφαλικό στέλεχος, στα νεφρά, ή στο αγγειακό σύστημα);
- Υπάρχει ένα σημείο αναφοράς ή πρόκειται για μια αντανακλαστική διαδικασία; Εάν υπάρχει ένα σημείο αναφοράς, είναι σταθερό ή μπορεί να αλλάζει;
- Πού είναι βρίσκεται το(α) κέντρο(α) ελέγχου; Πώς οι αισθητήρες επικοινωνούν μαζί του(ους);
- Ποιος είναι ο τελεστής(ες) και πώς το(α) κέντρο(α) ελέγχου επικοινωνεί(ουν) με τον(ους) τελεστή(ες);
- Πώς οι τελεστές επηρεάζουν τις ελεγχόμενες μεταβλητές όταν υπερβαίνουν και όταν είναι μικρότερες από το καθορισμένο σημείο; Εμπλέκονται περισσότερα από ένα όργανα; Αν ναι, πώς αλληλεπιδρούν μεταξύ τους;
- Πως εμπλέκονται εισροές από τα ψηλότερα κέντρα του εγκεφάλου και από ορμόνες που απελευθερώνονται από αδένες;

Δημιουργία Δομικών Διαγραμμάτων (Block Diagrams)



Πώς οι τελεστές επηρεάζουν τις ελεγχόμενες μεταβλητές όταν
κινούνται από τον υποθάλαμο; Πολλές φορές οι τελεστές είναι
απλά αριθμοί, αλλά μερικές φορές είναι και οι ίδιοι οι τελεστές
που επηρεάζουν τις ελεγχόμενες μεταβλητές. Πώς αλληλεπιδρούν
αυτοί οι τελεστές με τους βρόχους θετικής ανάδρασης;

Πολλά όργανα που συντονίζονται από τον υποθάλαμο
είναι οι αδένες. Η αδρεναλίνη που παράγει η αδρεναλική
αδένες, η οποία είναι ένας από τους αδένες που ελέγχονται από τον
ΑΝΣ, είναι ένας από τους αδένες που ελέγχονται από τον ΑΝΣ.
Υψηλή T: Οι μύες ανενεργοί, αγγεία διαστέλλονται, ιδρωτοποιόι αδένες εκκρίνουν



Δημιουργία Δομικών Διαγραμμάτων (Block Diagrams)



• Προσδιορίστε την ελεγχόμενη μεταβλητή (ες)	Τ αίματος
• Τι είδους διαταραχές ή εισροές θα κάνουν τις μεταβλητές αποκλίνουν από την ομοιόσταση; Από πού θα προέρχονται;	Τ περιβάλλοντος Φλεγμονή, Άσκηση, Πέψη
• Καθορίστε τον αισθητήρα(ες) που ανιχνεύουν την τρέχουσα τιμή της μεταβλητής(ων). Μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία μεταβλητή και αισθητήρες.	Αισθητήρες Θερμότητας (Thermoreceptors)
• Αν υπάρχουν περισσότερες από μία μεταβλητές ή/και τον αισθητήρες, υπάρχουν περισσότεροι από ένας βρόχοι ανάδρασης που εμπλέκονται; Αν ναι, είναι οποιοδήποτε από τους βρόγχους θετικής ανάδρασης;	Δεν ισχύει
• Πού βρίσκονται οι αισθητήρες (π.χ. στο εγκεφαλικό στέλεχος, στα νεφρά, ή στο αγγειακό σύστημα);	Υποθάλαμος
• Υπάρχει ένα σημείο αναφοράς ή πρόκειται για μια αντανakλαστική διαδικασία; Εάν υπάρχει ένα σημείο αναφοράς, είναι σταθερό ή μπορεί να αλλάζει;	Στους 37 οC
• Πού είναι βρίσκεται το(α) κέντρο(α) ελέγχου; Πώς οι αισθητήρες επικοινωνούν μαζί του(ους);	Κινητικός Φλοιός και Στέλεχος Μέσω των υποθαλαμικών περιοχών ελέγχου του ANΣ
• Ποιος είναι ο τελεστής(ες) και πώς το(α) κέντρο(α) ελέγχου επικοινωνεί(ουν) με τον(ους) τελεστή(ες);	Μύες, αιμοφόρα αγγεία, ιδρωτοποιοί αδένες Νευρώνες
• Πώς οι τελεστές επηρεάζουν τις ελεγχόμενες μεταβλητές όταν υπερβαίνουν και όταν είναι μικρότερες από το καθορισμένο σημείο; Εμπλέκονται περισσότερα από ένα όργανα; Αν ναι, πώς αλληλεπιδρούν μεταξύ τους;	Πολλά όργανα που συντονίζονται από τον υποθάλαμο Χαμηλή T: Οι μύες τρέμουν, αγγεία συστέλλονται, ιδρωτοποιοί αδένες ανενεργοί Υψηλή T: Οι μύες ανενεργοί, αγγεία διαστέλλονται, ιδρωτοποιοί αδένες εκκρίνουν
• Πως εμπλέκονται εισροές από τα ψηλότερα κέντρα του εγκεφάλου και από ορμόνες που απελευθερώνονται από αδένες;	Η συμπεριφορά αναζήτησης θερμότητας τείνει να μας οδηγεί σε περιβάλλον με ψηλότερη T



- **Τι είναι Μοντελοποίηση;**

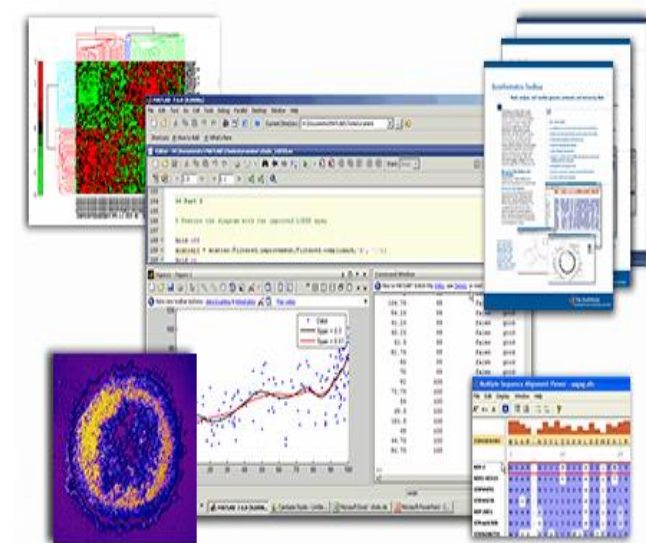
- Μοντέλο: διατύπωση με μαθηματικούς όρους των υποθέσεων που πιστεύεται ότι αποτελούν τη βάση ενός συγκεκριμένου πραγματικού προβλήματος
- Μοντελοποίηση είναι η διαδικασία της δημιουργίας μιας τέτοιας διατύπωσης

- **Γιατί είναι ότι αξίζει τον κόπο να μοντελοποιηθούν τα βιολογικά συστήματα; Ένα μοντέλο μπορεί**

- Να βοηθήσει να αποκαλυφθούν πιθανοί μηχανισμών που εμπλέκονται σε μια βιολογική διαδικασία
- Να βοηθήσει στην ερμηνεία και να αποκαλύψει πιθανές αντιφάσεις / ελλιπή δεδομένα
- Να βοηθήσει στην επιβεβαίωση / απόρριψη μιας υπόθεσης
- Να προβλέψει την απόδοση του συστήματος υπό συνθήκες που δεν έχουν δοκιμαστεί
- Να παρέχει πληροφορίες σχετικά με τις τιμές των παραμέτρων που δεν μπορούν να ελεγχθούν πειραματικά
- Να προτείνει νέες υποθέσεις που να οδηγήσουν σε νέα πειράματα



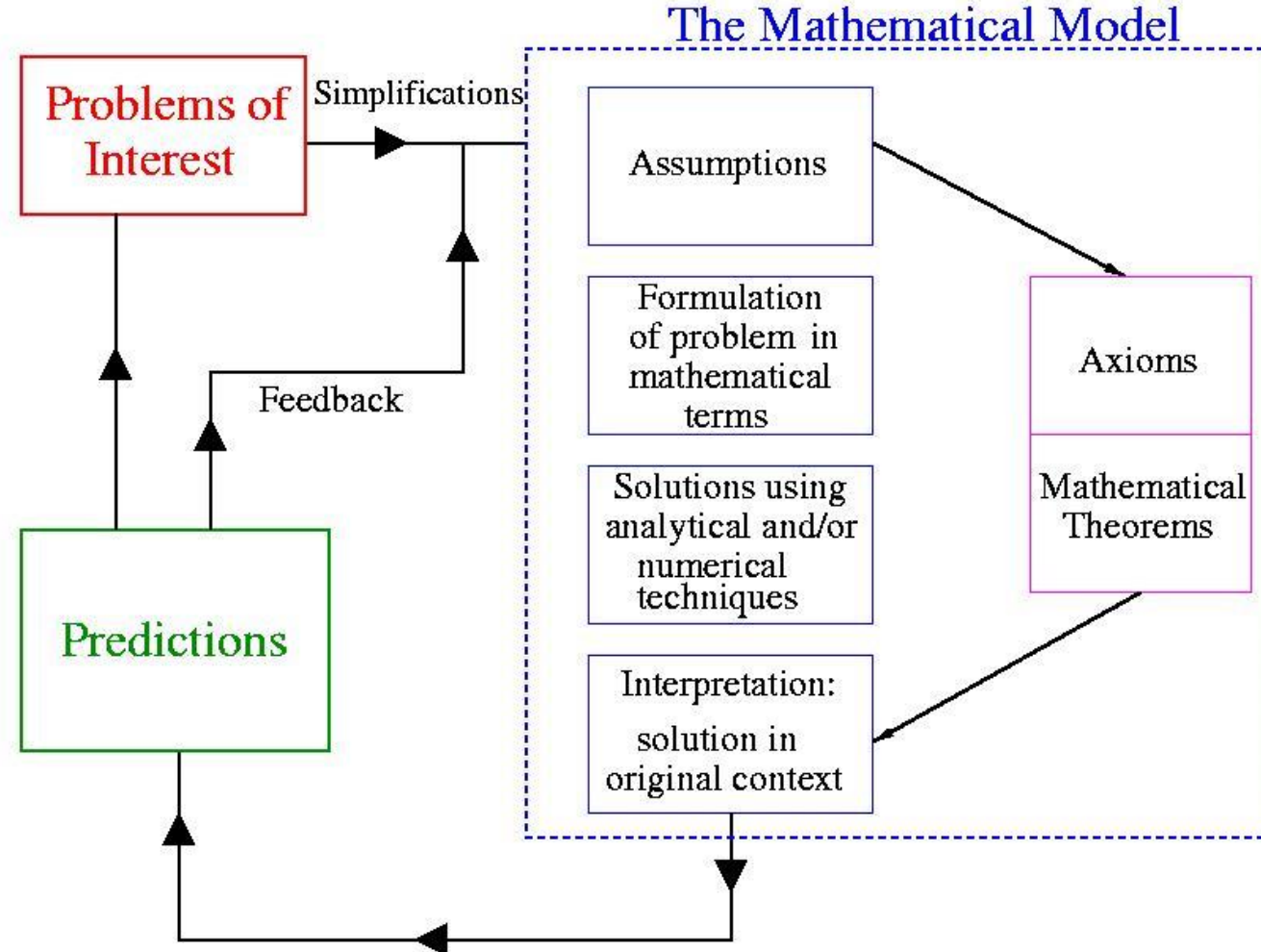
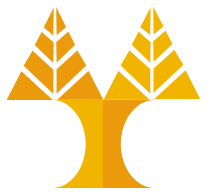
- Ποιοι είναι μερικοί περιορισμοί των μαθηματικών μοντέλων;
 - Ένα μοντέλο δεν είναι απαραίτητα και “σωστό”
 - Μη ρεαλιστικά μοντέλα μπορεί ταιριάζουν με τα δεδομένα πολύ καλά και να οδηγήσουν σε λανθασμένα συμπεράσματα
 - Τα απλά μοντέλα είναι εύκολο να τα διαχειριστούμε, αλλά συχνά απαιτούνται σημαντικά πιο πολύπλοκα μοντέλα
 - Οι ρεαλιστικές προσομοιώσεις απαιτούν ένα μεγάλο αριθμό από δεδομένα για να καταλήξουν στις σωστές παραμέτρους
- **Προσοχή:** Τα μοντέλα δεν εξηγούν και ποτέ δεν μπορούν από μόνα τους να παράξουν μια ολοκληρωμένη λύση για ένα βιολογικό πρόβλημα.





- **Πώς δημιουργούνται τα μοντέλα;**
 - Ξεκινούν από ένα ενδιαφέρον πρόβλημα
 - Γίνονται λογικές υποθέσεις για την απλοποίηση τους
 - Μεταφράζεται το πρόβλημα από τα λόγια σε ρεαλιστικά μαθηματικά/φυσικά συστήματα
- **Τι μπορεί να κάνει ένα μοντέλο;**
 - Λύσεις – Αναλυτικές/Αριθμητικές
 - Ερμηνείες-Τι σημαίνει η λύση σε σχέση με το αρχικό πρόβλημα;
 - Προγνωστικά-Τι δείχνει το μοντέλο ότι θα συμβεί, με αλλαγή των παραμέτρων;
 - Επικύρωση-Είναι τα αποτελέσματα σύμφωνα με τις πειραματικές παρατηρήσεις;

Η Διαδικασία της Μοντελοποίησης



Ανάλυση Δομικών Διαγραμμάτων



- Χρήση μετασχηματισμού Laplace
- Σε ένα δομικό διάγραμμα θεωρούμε ότι

- $G(s) = \text{output/input}$
- Η έξοδος δομών Σ είναι το άθροισμα των εισόδων
- Ξεκινούμε με το y πάμε αριστερόστροφα

$$y = G_p e_d = G_p [d + e_m] = G_p d + G_p e_m = G_p d + G_p G_E e_c$$

$$y = G_p d + G_p G_E G_c e_o = G_p d + G_p G_E G_c [r_{sp} - e_s]$$

$$y = G_p d + G_p G_E G_c r_{sp} - G_p G_E G_c e_s = G_p d + G_p G_E G_c r_{sp} - G_p G_E G_c G_s y$$

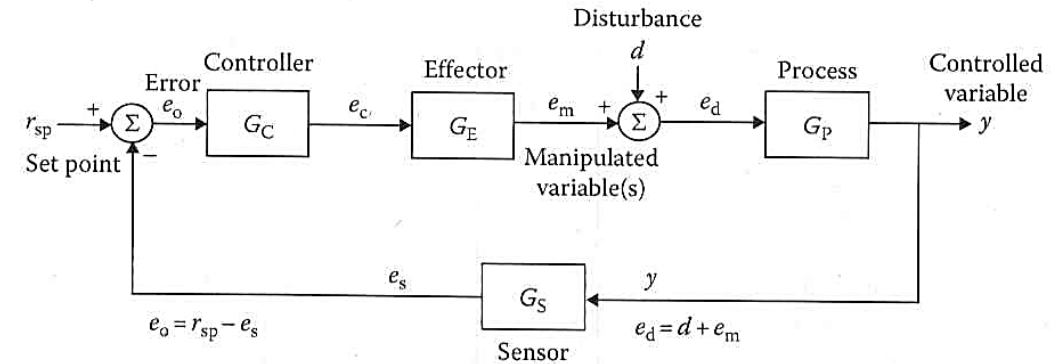
- Solve for y

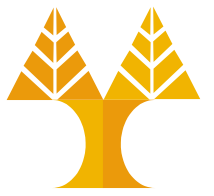
$$y = \frac{G_p d}{1 + G_p G_E G_c G_s} + \frac{G_p G_E G_c r_{sp}}{1 + G_p G_E G_c G_s}$$

- Βρείτε τις συναρτήσεις μεταφοράς (εδώ δύο: μια για το r_{sp} και μια για το d)

$$H_{sp} = \frac{\text{output}}{\text{input}} = \frac{y}{r_{sp}} = \frac{G_p G_E G_c}{1 + G_p G_E G_c G_s}$$

$$H_d = \frac{\text{output}}{\text{input}} = \frac{y}{d} = \frac{G_p}{1 + G_p G_E G_c G_s}$$





- **Γιατί χρησιμοποιούμε μετασχηματισμούς Laplace;**
 - Βρίσκουμε λύση σε διαφορικές εξισώσεις χρησιμοποιώντας άλγεβρα
 - Δεν υπάρχει ανάγκη για συνέλιξη της εισόδου και λύση διαφορικής εξίσωσης
 - Η σχέση τους με το μετασχηματισμό Fourier επιτρέπει εύκολα να χαρακτηριστεί ένα σύστημα
 - Χρήσιμοι σε συστήματα με πολλαπλές διεργασίες
- **Πώς χρησιμοποιούνται οι μετασχηματισμοί Laplace;**
 - Βρείτε τις διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα
 - Βρείτε το μετασχηματισμό Laplace
 - Επιλύστε αλγεβρικά ως προς την έξοδο ή την παράμετρο που σας ενδιαφέρει
 - Εφαρμόστε αντίστροφο μετασχηματισμό για να βρείτε τη λύση

Τι είναι οι μετασχηματισμοί Laplace;



- **“Μετασχηματισμοί”:**

- $f(t) \rightarrow F(s)$, με ολοκλήρωση ως προς t και s είναι η παράμετρος
- $F(s) \rightarrow f(t)$, όπου t είναι η παράμετρος και ολοκλήρωση ως προς s

- **Ιδιότητες**

- t πραγματικό, s μιγαδικό
- Ο αντίστροφος χρειάζεται μιγαδική ανάλυση για τη λύση
- Θεωρεί $f(t) = 0$ for all $t < 0$

- **Υπολογισμός $F(s) = L\{f(t)\}$**

- Δύσκολος τρόπος
 - Λύση του ολοκληρώματος
- Εύκολος τρόπος
 - Αναγνωρίζονται κάποιοι μετασχηματισμοί
 - Χρησιμοποιούνται πίνακες
 - Χρησιμοποιούνται κάποιες ιδιότητες
 - Εύκολα μαθηματικά

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

TABLE 2-1 Laplace Transform Pairs

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
Unit impulse $\delta(t)$	1	$\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at} - ate^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$
Unit step $1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{s^n}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$t^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t - \phi)$	$\frac{s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$	
$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \phi)$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$
$t^n e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$	
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$		
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$		
$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$		
$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$		
$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$	$1 - \cos \omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$
$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\omega t - \sin \omega t$	$\frac{\omega^3}{s^2(s^2 + \omega^2)}$
$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$	$\sin \omega t - \omega t \cos \omega t$	$\frac{2\omega^3}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$\frac{1}{ab} \left[1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt}) \right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{2\omega} t \sin \omega t$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
		$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
		$\frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \quad (\omega_1^2 \neq \omega_2^2)$	$\frac{s}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)}$
		$\frac{1}{2\omega} (\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$	$\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$

Properties of Laplace Transforms

Name	Time Function	Laplace Transform
Transform pair	$f(t)$	$F(s)$
Superposition	$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$	$\alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$
Time delay ($\tau \geq 0$)	$f(t - \tau)$	$F(s)e^{-s\tau}$
Time scaling	$f(at)$	$\frac{1}{ a }F\left(\frac{s}{a}\right)$
Frequency shift	$e^{-at}f(t)$	$F(s + a)$
Differentiation	$\frac{d^m}{dt^m}f(t)$	$s^m F(s) - s^{m-1}f(0) - \dots - \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}f(0)$
Integration	$\int f(\xi)d\xi$	$\frac{1}{s}F(s)$
Convolution	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s)F_2(s)$
Initial Value Theorem	$f(0^+)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
Final Value Theorem	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
Time product	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(\xi)F_2(s-\xi)d\xi$
Multiplication by time	$tf(t)$	$-\frac{d}{ds}F(s)$

$$F(z) = \sum \alpha_r z^r \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(p)e^{ip\chi} dp \quad \text{where } z = e^{i\omega\chi}, p = \frac{r}{N}, \alpha_r \mapsto g(p)$$

The functions $f(\chi)$ and $g(p)$ are called *Fourier transforms* of one another.

$$f(\chi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} g(p)e^{ip\chi} dp, \quad g(p) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\chi)e^{-ip\chi} d\chi$$

TABLE 2-2 Properties of Laplace Transforms

1	$\mathcal{L}[Af(t)] = AF(s)$
2	$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$
3	$\mathcal{L}_\pm \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] = sF(s) - f(0_\pm)$
4	$\mathcal{L}_\pm \left[\frac{d^2}{dt^2} f(t) \right] = s^2 F(s) - sf(0_\pm) - \dot{f}(0_\pm)$
5	$\mathcal{L}_\pm \left[\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0_\pm)$ where $f^{(k-1)} = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} f(t)$
6	$\mathcal{L}_\pm \left[\int f(t) dt \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{[\int f(t) dt]_{t=0_\pm}}{s}$
7	$\mathcal{L}_\pm \left[\iint f(t) dt dt \right] = \frac{F(s)}{s^2} + \frac{[\int f(t) dt]_{t=0_\pm}}{s^2} + \frac{[\iint f(t) dt dt]_{t=0_\pm}}{s}$
8	$\mathcal{L}_\pm \left[\int \dots \int f(t)(dt)^n \right] = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{s^{n-k+1}} \left[\int \dots \int f(t)(dt)^k \right]_{t=0_\pm}$
9	$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(t) dt \right] = \frac{F(s)}{s}$
10	$\int_0^\infty f(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} F(s) \quad \text{if } \int_0^\infty f(t) dt \text{ exists}$
11	$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$
12	$\mathcal{L}[f(t-\alpha)1(t-\alpha)] = e^{-as}F(s) \quad \alpha \geq 0$
13	$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$
14	$\mathcal{L}[t^2 f(t)] = \frac{d^2}{ds^2} F(s)$
15	$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \quad n = 1, 2, 3, \dots$
16	$\mathcal{L} \left[\frac{1}{t} f(t) \right] = \int_s^\infty F(s) ds \quad \text{if } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} f(t) \text{ exists}$
17	$\mathcal{L} \left[f\left(\frac{t}{a}\right) \right] = aF(as)$

Χρήση Matlab για Laplace

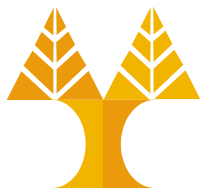


Χρήση Matlab για μετασχηματισμό του $f(t) = te^{-4t}$

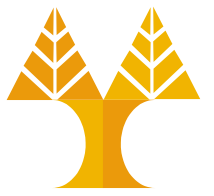
```
syms t  
syms s  
laplace(t*exp(-4*t),t,s)  
ans =  
1/(s+4)^2
```

Χρήση Matlab για αντίστροφο μετασχηματισμό του $F(s) = \frac{s(s+6)}{(s+3)(s^2+6s+18)}$

```
syms s  
syms t  
ilaplace(s*(s+6)/((s+3)*(s^2+6*s+18)))  
ans =  
-exp(-3*t)+2*exp(-3*t)*cos(3*t)
```

Επιπρόσθετες Διαφάνειες (Εκτός Ύλης)



- **Η βηματική (step) συνάρτηση στο μετασχηματισμό Laplace**

- Ορισμός Μοναδιαίας Βηματικής Συνάρτησης: $u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$
- Χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με $f(t) \rightarrow f(t)u(t)$ λόγω των ορίων του ολοκληρώματος Laplace:

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

- **Σημειώσεις για $f(0^+)$, $f(0^-)$ & $f(0)$**

- Οι τιμές είναι διαφορετικές μόνο αν η $f(t)$ δεν είναι συνεχής στο $t=0$
- Παράδειγμα ασυνεχούς συνάρτησης: $u(t)$

$$f(0^-) = \lim_{t \rightarrow 0^-} u(t) = 0$$

$$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} u(t) = 1$$

$$f(0) = u(0) = 1$$