



Πανεπιστήμιο Κύπρου

Πρόγραμμα Προϋπηρεσιακής Κατάρτισης

ΠΡΥ 017 – Πολυτεχνικά και Τεχνικά Επαγγέλματα

Διάλεξη 6

Ψηφιακά Συστήματα



- **Κυρίως συνεχή (μακροσκοπικά)**

- Χρόνος, επιτάχυνση, ρεύμα, κλπ.
- Αναλογικά (Analog)
 - Παίρνουν οποιαδήποτε τιμή
 - Μετρούμε συνεχείς τιμές
- Κάποια μπορεί να είναι διακριτά
 - Κβαντικές καταστάσεις, μάζα (# ατόμων)

- **Και τα μαθηματικά είναι συνεχή**

- Απειροστικός λογισμός (calculus)

- **Για επεξεργασία στον υπολογιστή**

- Μετατροπή σε διακριτά (Digital)
- Διακριτά
 - Παίρνουν συγκεκριμένες τιμές
 - Μπορούμε να μετρήσουμε τα ψηφία



Η τιμή της ώρας



Η τιμή της ώρας σε ώρες και λεπτά με 4 ψηφία



- **Αναλογικές υπολογιστικές μηχανές**

- Μπορούν να κατασκευαστούν, αλλά ... είναι πιο πολύπλοκες και δεν είναι προγραμματιζόμενες

- **Μηχανή Πρόβλεψης της Παλίρροιας (Great Brass Brains)**

- Αναλογικός, μηχανικός υπολογιστής που υπολόγιζε το μέγεθος της παλίρροιας σε διαφορετικές περιοχές των ΗΠΑ
- Πάνω από 1,1 τόνους – Ανάλογος 100 μαθηματικών!
- U.S. Coast and Geodetic Survey, 1910
- Σε λειτουργία μέχρι το 1965 όταν αντικαταστάθηκε από ένα IBM 7090





- **Αναλογικές υπολογιστικές μηχανές**

- Μπορούν να κατασκευαστούν, αλλά ... είναι πιο πολύπλοκες και δεν είναι προγραμματιζόμενες

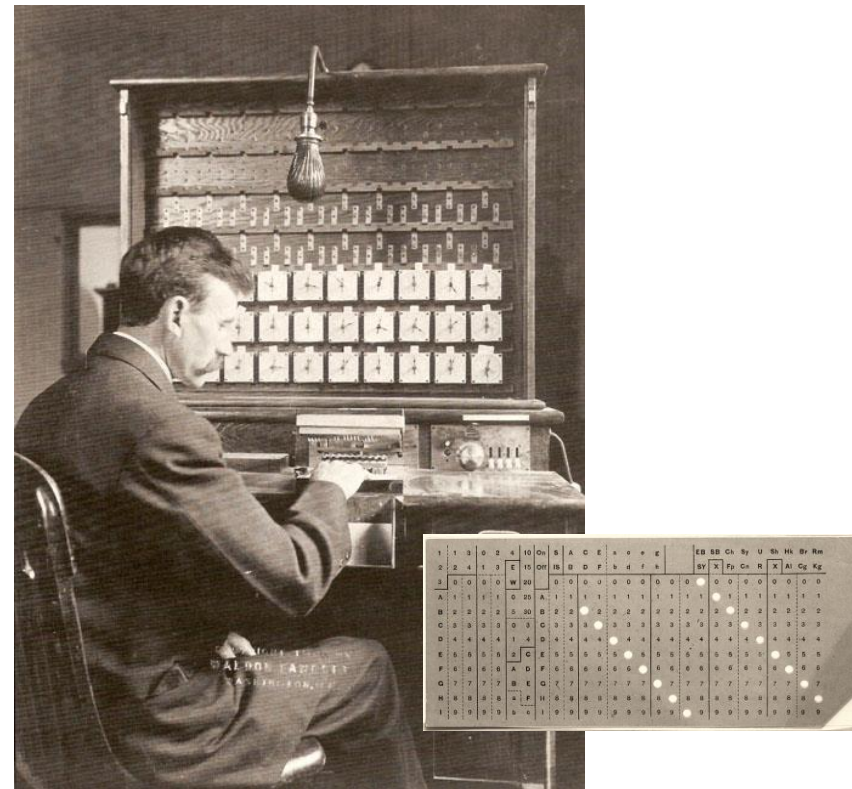
- **Διαφορικός αναλυτής**

- Vannevar Bush
- Τροχοί τριβής μεταβλητού μεγέθους για την προσομοίωση της συμπεριφοράς των διαφορικών εξισώσεων





- **Αν τα δεδομένα μετατραπούν σε διακριτά**
 - Πιο γρήγορη ανάλυση
 - Επεξεργασία σε ψηφιακούς (προγραμματιζόμενους υπολογιστές)
 - Μηχανικούς
 - Ηλεκτρικούς
 - Ηλεκτρονικούς
- **Τα δεδομένα πρέπει πρώτα να γίνουν διακριτά**



Απογραφή ΗΠΑ 1890 - Computing and Tabulating (αργότερα IBM): Αυτοματισμός με χρήση διάτρητων καρτών. Η ανάλυση των στοιχείων διήρκεσε τρία χρόνια (αντί 8 την προηγούμενη δεκαετία)



- **Συστήματα Αρίθμησης**

- Αναπαριστούν τα δεδομένα με διακριτά ψηφία

- **Δεκαδικό (Decimal)**

- Βάση 10
- Χρησιμοποιεί 10 σύμβολα (0,1,2 ... 9)
- Για τον υπολογισμό της τιμής ενός αριθμού
 - Πολλαπλασιάζουμε το κάθε ψηφίο με τη δύναμη της βάσης που αντιστοιχεί στη θέση του ψηφίου
- Δεν είναι χρήσιμο για υλικό (hardware)
 - Δεν υπάρχουν συσκευές με 10 καταστάσεις για να αντιπροσωπεύουν τα σύμβολα
 - Δάκτυλα;

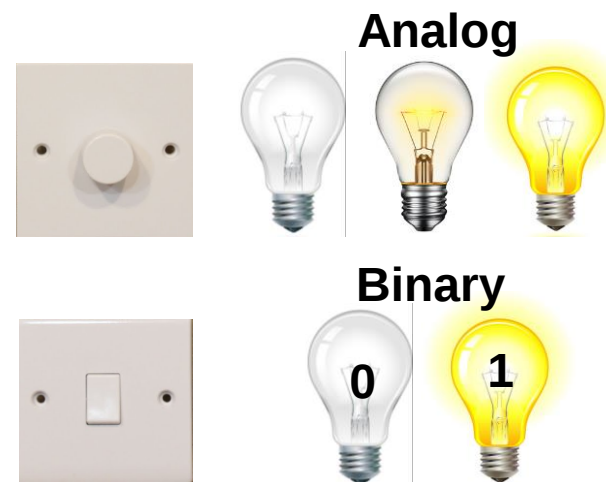


$$\begin{aligned} & (3252,36)_{10} \\ &= 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 2 \times 10^0 \\ & \quad + 3 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2} \end{aligned}$$



• Δυαδικό (Binary)

- Βάση 2
- Χρησιμοποιεί 2 σύμβολα (0, 1)
- Ο υπολογισμός της τιμής ενός αριθμού όπως και πριν
- Εξαιρετικό για υλικό
 - Πολλές συσκευές έχουν 2 καταστάσεις (διακόπτες, μαγνητισμός, τρανζίστορ, κλπ.)
 - Λογικά συστήματα έχουν επίσης 2 καταστάσεις (true, false)
- Δεν είναι καλό για επικοινωνίες
 - Χρειάζονται πολλά δυαδικά ψηφία για να αντιπροσωπεύσουν με σχετική ακρίβεια ένα αριθμό
- Έχει επικρατήσει γιατί είναι εύκολο (και φθηνό) να τα κατασκευάσουμε



$$\begin{aligned}(1001,1)_2 &= \\&= 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\&\quad + 1 \times 2^{-1} \\&= 8 + 0 + 0 + 1 + 0.5 \\&= (9.5)_{10}\end{aligned}$$



• Πρόσθεση

Κανόνες:

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 10$$

Παράδειγμα:

$$\begin{array}{r} 10110101 \\ 10100 + \\ \hline 11001001 \end{array}$$

• Πολλαπλασιασμός

Κανόνες:

$$0 * 0 = 0$$

$$0 * 1 = 0$$

$$1 * 0 = 0$$

$$1 * 1 = 1$$

Παράδειγμα:

$$\begin{array}{r} 101001 \\ 110 \times \\ \hline 000000 \\ 101001 \\ 101001 \\ \hline 11110110 \end{array}$$

• Αφαίρεση

Κανόνες:

$$0 - 0 = 0$$

$$0 - 1 = 1$$

(και δανειζόμαστε)

$$1 - 0 = 1$$

$$1 - 1 = 0$$

Παράδειγμα:

$$\begin{array}{r} 110011 \\ 10110 - \\ \hline 11101 \end{array}$$



- **Ανάγκη αναπαράστασης αρνητικών αριθμών**
- Στο δεκαδικό σύστημα χρησιμοποιούμε το πρόσημο.
- Στο δυαδικό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα επιπλέον ψηφίο στην αρχή του αριθμού.
 - 0 : θετικό πρόσημο (+)
 - 1 : αρνητικό πρόσημο (-)
- **Παράδειγμα**
 - Αποφασίζουμε πρώτα τον μέγιστο αριθμό ψηφίων που χρειαζόμαστε.
 - $(-7)_{10} = (1111)_2$
 - $(-2)_{10} = (1010)_2$
 - $(+7)_{10} = (0111)_2$
 - Χρειαζόμαστε 4 ψηφία
 - Διάστημα τιμών -7 μέχρι +7
 - Το πρώτο ορίζει το πρόσημο και τα υπόλοιπα 3 τον αριθμό
- **Προβλήματα**
 - Τι αναπαριστά ο αριθμός 1000 στην πράξη $0111+1=1000$;
 - Πως γίνονται τώρα οι αριθμητικές πράξεις;



- Οι αρνητικοί αριθμοί αναπαρίστανται με τον συμπληρωματικό τους
 - “Συμπλήρωμα ως προς δύο” (two’s complement)
 - Μπορούν να γίνουν οι αριθμητικές πράξεις όπως και πριν
 - Το πρώτο ψηφίο σε αυτή τη μέθοδο δεν έχει μόνο πρόσημο, αλλά και την τιμή που του αναλογεί λόγω της θέσης του
 - **Προσοχή:** Πρέπει ο αριθμός των ψηφίων που απαιτούνται να προαποφασίζεται και να τηρείται
 - Αν έχετε αμφιβολίες χρησιμοποιήστε περισσότερα ψηφία για σιγουριά!
- Μετατροπή δυαδικού αριθμού σε “συμπλήρωμα ως προς δύο”
 - Άλλαξε όλα τα στοιχεία του δυαδικού αριθμού από 0 σε 1 και αντίστροφα, και πρόσθεσε 1
 - Παραδείγματα με 4 ψηφία
 - $(1)_{10} \rightarrow 0001 \rightarrow 1110+1 = 1111 = (-1)_{10}$
 - $(8)_{10} \rightarrow 1000 \rightarrow 0111+1 = 1000 = (-8)_{10}$
 - $(5)_{10} \rightarrow 0101 \rightarrow 1010+1 = 1011 = (-5)_{10}$

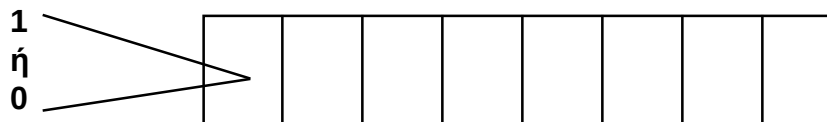


- Ένα Bit είναι στοιχειώδης μονάδα που κρατάει πληροφορία
 - Στον ψηφιακό υπολογιστή, αυτό αντιπροσωπεύεται από την ύπαρξη ή όχι ηλεκτρικού ρεύματος.
- Byte (B)
 - Δίνει τη δυνατότητα καταχώρησης και μέτρησης στη μνήμη ενός χαρακτήρα
 - Ένα byte έχει 8 bits (0 ή 1)
 - Συνήθως μετριέται σε kB, MB ή GB

BIT

(Binary digIT)

1 Byte = 8 Bits



KB	1 KiloByte	= 2^{10} bytes	= 1024 bytes
MB	1 MegaByte	= 2^{10} KB	= 1.048.576 bytes
GB	1 GigaByte	= 2^{10} MB	= 1.073.741.824 bytes

Κωδικοποίηση δεδομένων - κώδικας ASCII



- Οι Η/Υ αναπαριστούν κάθε είδους δεδομένα (γράμματα, αριθμούς, ήχο) μέσω ακολουθιών από δυαδικά ψηφία. Γι' αυτό το λόγο χρησιμοποιούνται κώδικες.
- Το ASCII (American Standard Code for Information Interchange) δημιουργήθηκε για να υπάρχει μια κοινή αναπαράσταση δεδομένων.
- Συμπεριλαμβάνει 128 αλφαριθμητικά στοιχεία
 - 94 στοιχεία που μπορούν να εκτυπωθούν (26 κεφαλαία και 26 μικρά γράμματα, 10 αριθμούς και 32 σύμβολα)
 - 34 στοιχεία που δεν μπορούν να εκτυπωθούν (χαρακτήρες που χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο υπολογιστών)
 - Χρησιμοποιεί 7 δυαδικά ψηφία.
 - Ένα όγδοο ψηφίο χρησιμοποιείται για την ανίχνευση λαθών σε δεδομένα επικοινωνίας και υπολογισμού (ονομάζεται δυαδικό ψηφίο ισοτιμίας, parity bit).

Πίνακας ASCII



$A_3 A_2 A_1 A_0$	$A_6 A_5 A_4$							
	000	001	010	011	100	101	110	111
0000	NULL	DLE	SP	0	@	P	`	p
0001	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
0010	STX	DC2	"	2	B	R	b	r
0011	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
0100	EOT	DC4	\$	4	D	T	d	t
0101	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0110	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0111	BEL	ETB		7	G	W	g	w
1000	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
1001	HT	EM	,)	9	I	Y	i	y
1010	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
1011	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
1100	FF	FS	,	<	L	\	l	
1101	CR	GS	-	=	M	]	m	}
1110	SO	RS	.	>	N	^	n	~
1111	SI	US	/	?	O	_	o	DEL



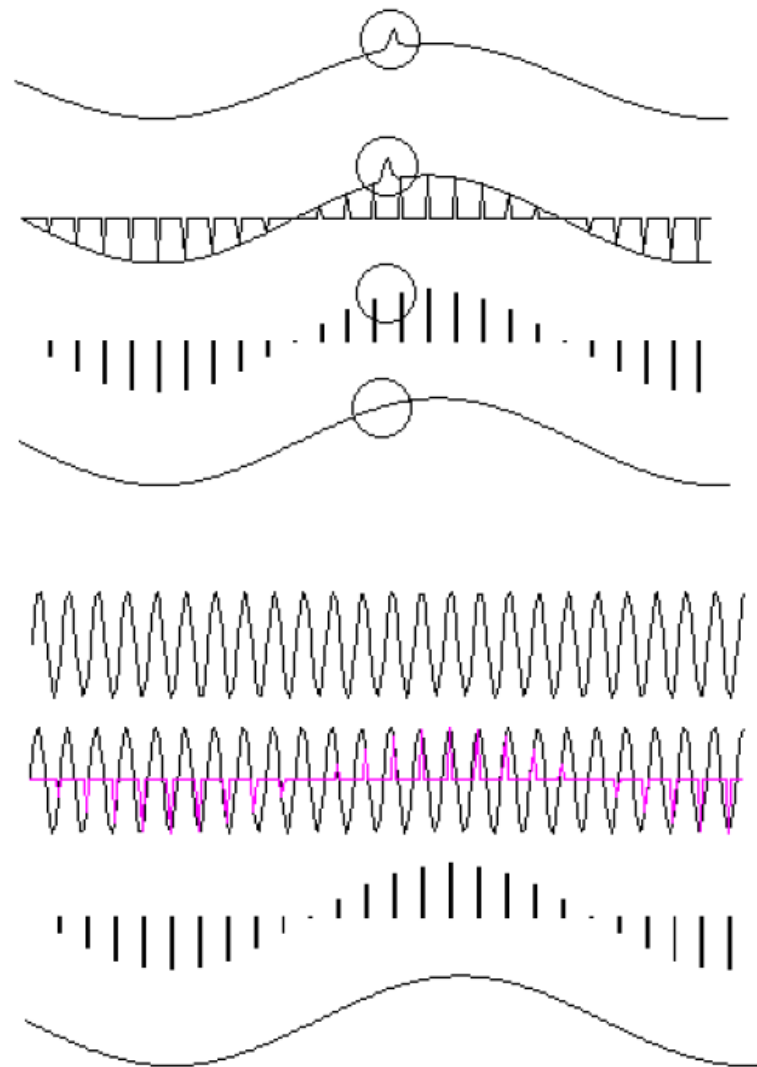
- Γράψετε το όνομα του μαθήματος μας σαν σειρά δυαδικών ψηφίων χρησιμοποιώντας τον κώδικα ASCII.

P	R	Y	0	1	7
0000101	0010101	1001101	0000011	001011	0111011



- Ψηφιοποίηση του χρόνου – Δειγματοληψία (Sampling)

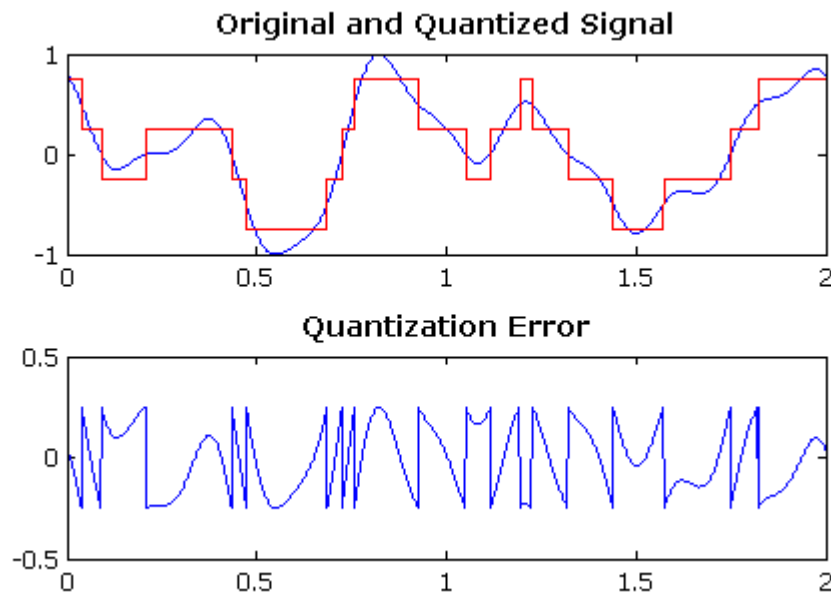
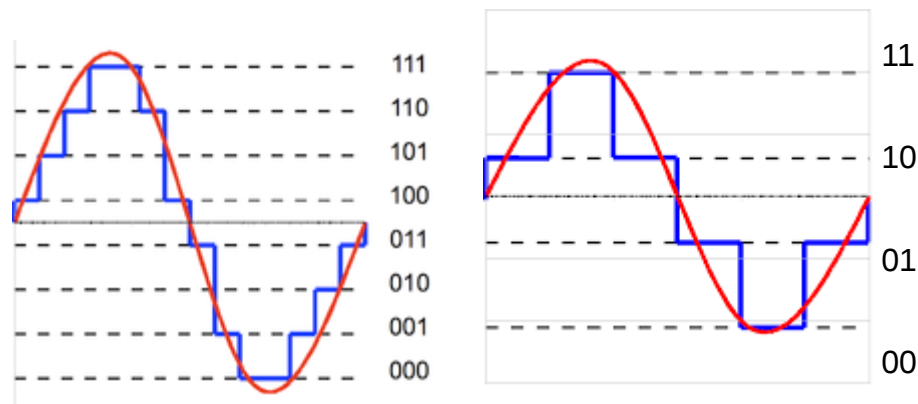
- Δειγματοληψία της τιμής του σήματος κάθε dt
- Συχνότητα δειγματοληψίας
 - $f_s = 1/dt$
- Χαμηλή f_s
 - Δεν θα δούμε λεπτομέρειες μεγαλύτερης συχνότητας
 - Αναδίπλωση (aliasing)
- Κριτήριο Nyquist: $f_s > 2f_{max}$





- Ψηφιοποίηση του πλάτους – Κβάντιση (Quantization)

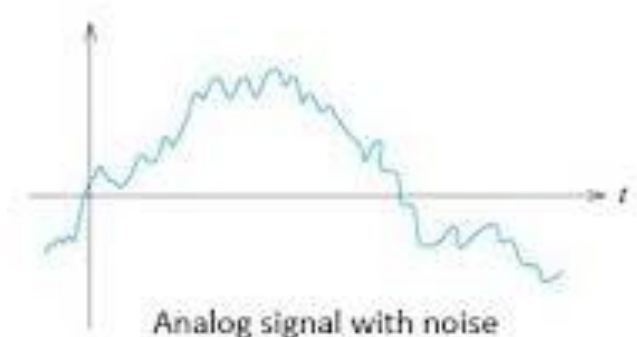
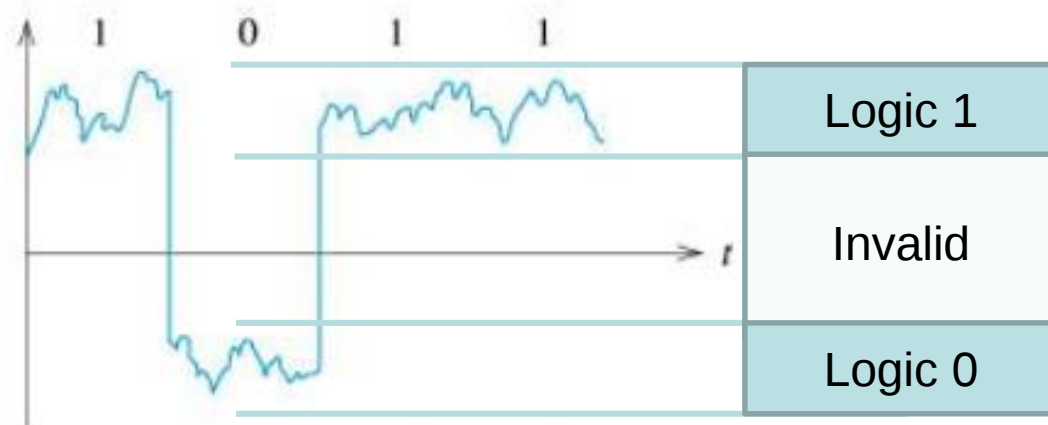
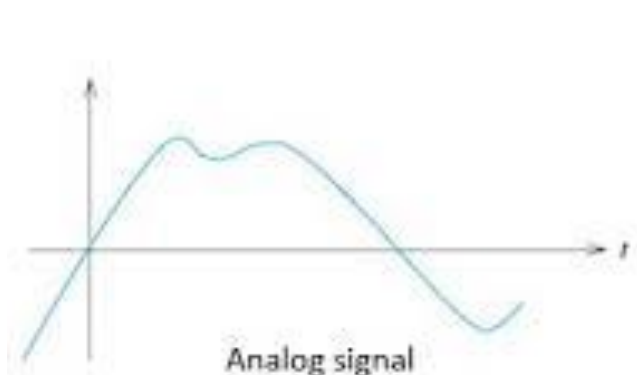
- Αρκετά επίπεδα ώστε να μην χάσουμε τις μικρές αλλαγές του πλάτους
- Αναπαράσταση του σήματος με μεγαλύτερη ακρίβεια
- Μεγάλο εύρος πλάτους → περισσότερα ψηφία



Προτερήματα Ψηφιακών Σημάτων



- Τα ψηφιακά συστήματα είναι λιγότερο ευαίσθητα στον θόρυβο
 - Φτάνει να διακρίνεται το 0 από το 1



Για κυκλώματα CMOS: LOW: $0 \rightarrow +1.5 \text{ V}$
HIGH: $+3.5 \rightarrow +5 \text{ V}$

Για κυκλώματα TTL: LOW: $0 \rightarrow +0.8 \text{ V}$
HIGH: $+2 \rightarrow +5 \text{ V}$



- **Πράξεις σε δυαδικές μεταβλητές**
 - Πολύπλοκα λογικά προβλήματα μπορούν να απλοποιηθούν με δυαδική λογική, George Boole(1854)
- **Δυαδικές μεταβλητές**
 - Μπορούν να πάρουν μόνο δύο διακριτές μορφές: 0,1 ή Σωστό (True), Λάθος (False)
 - Αναπαρίστανται με γράμματα του αλφαβήτου
- **Λογικές πράξεις εκτελούνται πάνω στις δυαδικές μεταβλητές**
 - Τρεις βασικές πράξεις (τελεστές)
 - AND (και)
 - OR (ή)
 - NOT (αντιστροφή)



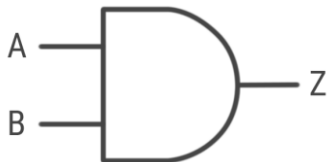
- **Λογικοί Τελεστές**

- Πίνακες Αληθείας (Truth Tables), Λογική Συνάρτηση (Boolean Expressions), και Λογικές Πύλες (Logic Gates)

AND

A	B	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$Z = A \cdot B = A B$$



OR

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

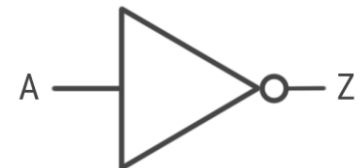
$$Z = A + B$$



NOT

A	Z
0	1
1	0

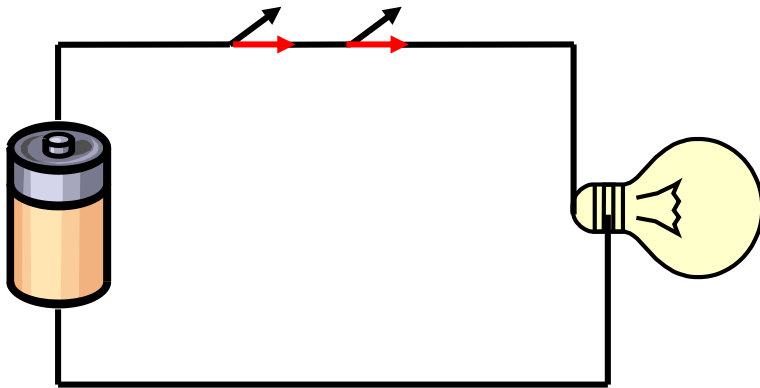
$$Z = \bar{A} = A'$$



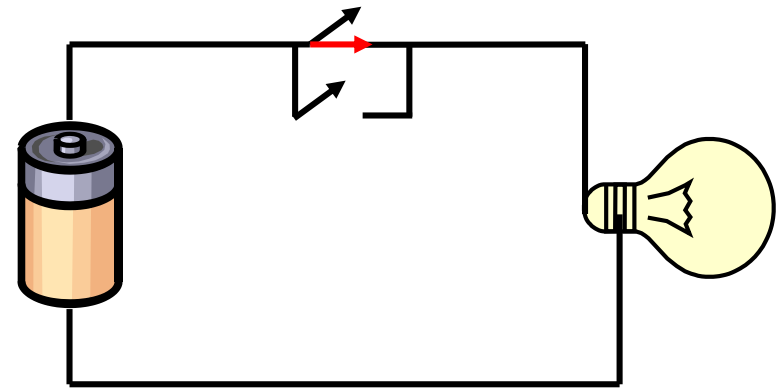


- Κυκλώματα

AND



OR





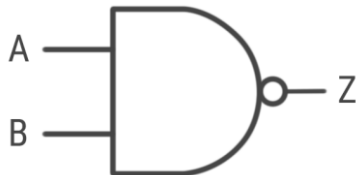
• Λογικοί Τελεστές

- Πίνακες Αληθείας (Truth Tables), Λογική Συνάρτηση (Boolean Expressions), και Λογικές Πύλες (Logic Gates)

NAND

A	B	Z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

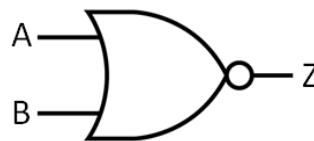
$$Z = (A \cdot B)' = \overline{A \cdot B}$$



NOR

A	B	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

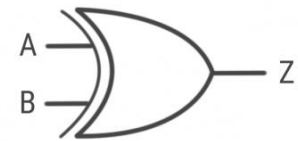
$$Z = (A + B)' = \overline{A + B}$$



XOR

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$Z = A \oplus B$$



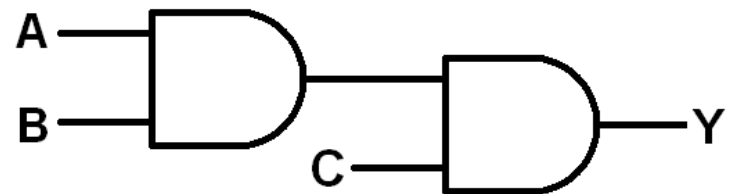


• Παράδειγμα

- Συστήματα ελέγχου: π.χ., το αυτοκίνητο θα ξεκινήσει μόνο αν είναι οι πόρτες κλειδωμένες, οι ζώνες ασφαλείας δεμένες και το κλειδί στρέφεται

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$Y = ABC$$



Δυαδικός Ημιαθροιστής (half adder)



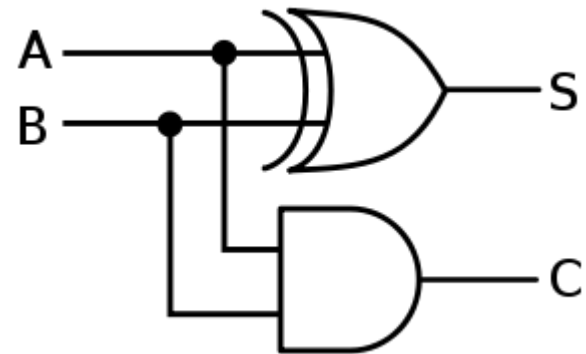
- Πρόσθεση 1 bit

- Τέσσερα πιθανά αποτελέσματα
- $0 + 0 = 0$
- $0 + 1 = 1$
- $1 + 0 = 1$
- $1 + 1 = 10$

A	B	S	C
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

- Κάνει πρόσθεση 1 bit

- Εισερχόμενα
 - A, B
- Εξερχόμενα:
 - S (άθροισμα), C (κρατούμενο)
- Λογική συνάρτηση
 - $S = A \text{ XOR } B$
 - $C = A \text{ AND } B$





- Περιλαμβάνει τις πράξεις που γίνονται με δυαδικές μεταβλητές.
- **George Boole (1815-1864)**
 - Καθηγήςτης, Queens College, Cork, Ireland
 - 1847 – “*Mathematical Analysis of Logic*”
- **Κανόνες και Ιδιότητες**

Κανόνες πρόσθεσης

$$A+0 = A$$

$$A+1 = 1$$

$$A+A' = 1$$

$$A+A = A \text{ (όχι } 2A)$$

Κανόνες πολλαπλασιασμού

$$A.0 = 0$$

$$A.1 = A$$

$$A.A = A \text{ (όχι } A^2)$$

$$A.A' = 0$$



- Κανόνες και Ιδιότητες

Αντιμεταθετική ιδιότητα

$$A+B = B+A$$

$$A.B = B.A$$

Προσεταιριστική ιδιότητα

$$A+(B.C) = (A+B).(A+C)$$

$$A.(B+C) = (A.B)+(A.C)$$

Άλλοι κανόνες

$$(A')' = A$$

$$(A+B)' = A'.B'$$

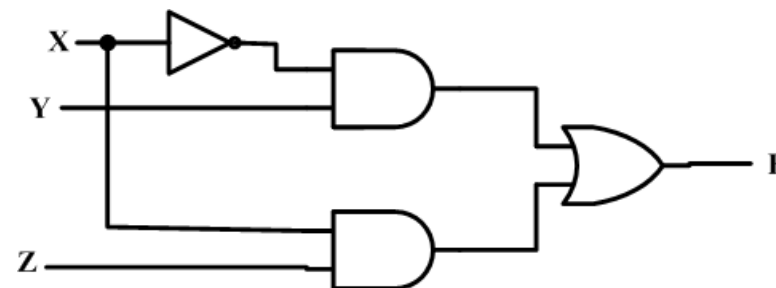
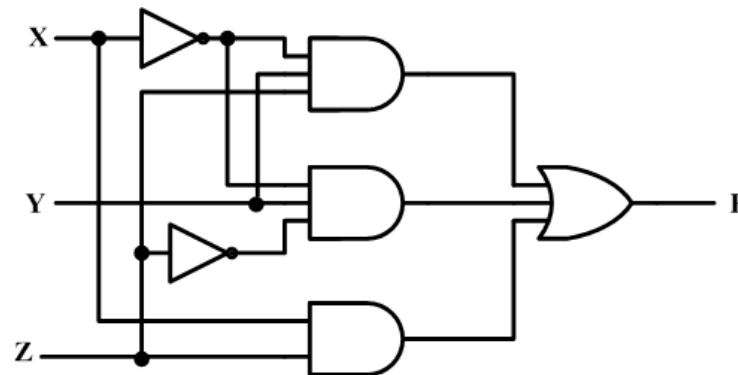
$$(A.B)' = A'+B'$$

Άλγεβρα Boole (Boolean algebra)



- Απλοποίηση των εξισώσεων

- $F = X'YZ + X'YZ' + XZ$
 $X'Y(Z + Z') + XZ$
 $X'Y \cdot 1 + XZ$
 $X'Y + XZ$





- Ακόμα ένα παράδειγμα

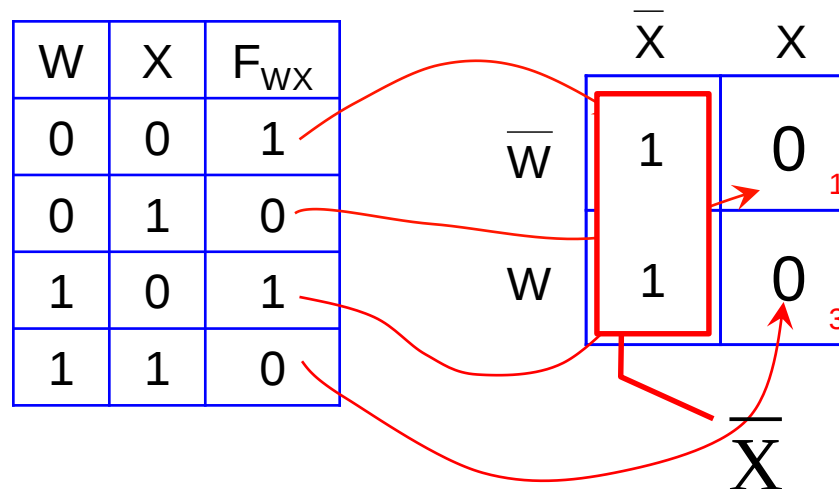
$$\begin{aligned}(X + Y).(X + Z).\overline{\overline{X}.Y} &= (XX + YX + XZ + YZ)(\overline{\overline{X}} + \overline{Y}) \\&= (X + YX + XZ + YZ)(X + \overline{Y}) \\&= (X(1 + Y + Z) + YZ)(X + \overline{Y}) \\&= (X + YZ)(X + \overline{Y}) \\&= XX + YZX + X\overline{Y} + YZ\overline{Y} \\&= X + YZX + X\overline{Y} + 0 \\&= X(1 + YZ + \overline{Y}) \\&= X\end{aligned}$$



- Πίνακας Karnaugh

- Γραφική αναπαράσταση της εξίσωσης
- Ομαδοποίηση όσο το δυνατόν περισσότερων 1 σε όσο το δυνατό λιγότερες ομάδες.
- Δίνει την πιο απλοποιημένη μορφή της εξίσωσης

K-Map Με Δύο Μεταβλητές



Πίνακες Karnaugh



- Παράδειγμα με 3 μεταβλητές

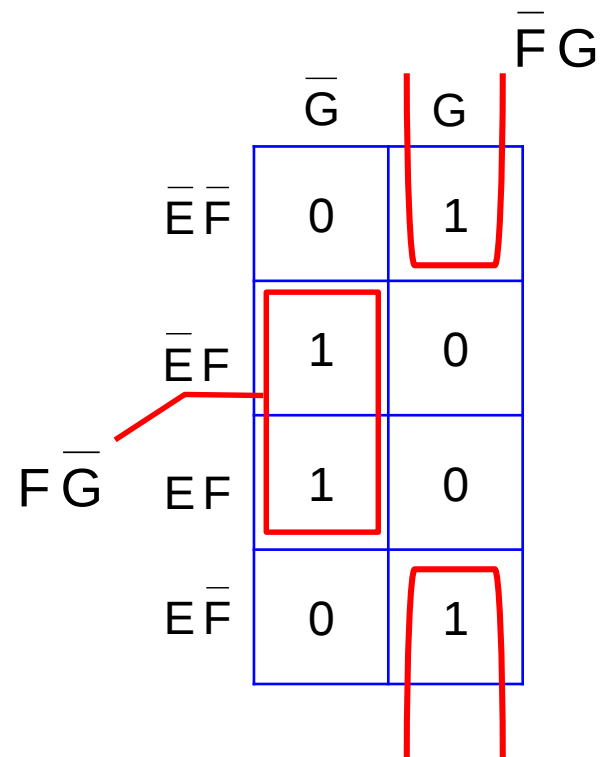
E	F	G	F_2
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Πίνακες Karnaugh



- Παράδειγμα με 3 μεταβλητές

E	F	G	F_2
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0



$$F_2 = F\bar{G} + \bar{F}G$$

Πίνακες Karnaugh



- Παράδειγμα με 4 μεταβλητές

E	F	G	H	K
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

	$\overline{G} \ \overline{H}$	$\overline{G} \ H$	GH	$G \ \overline{H}$
$\overline{E} \ \overline{F}$				
$\overline{E} \ F$				
$E \ F$				
$E \ \overline{F}$				



• Συνθήκες Αδιαφορίας

- Επισημαίνονται με (X) στον πίνακα αλήθειας
- Η σχεδίαση δεν ενδιαφέρεται αν η έξοδος είναι (0) ή (1).
- Μια συνθήκη αδιαφορίας μπορεί να αντιμετωπιστεί ως (0) ή (1) σε ένα K-Map.
 - Αντιμετωπίζοντας την ως (0) σημαίνει ότι δεν χρειάζεται να το ομαδοποιήσετε.
 - Αντιμετωπίζοντας την ως (1) σας επιτρέπει να κάνετε μια ομαδοποίηση μεγαλύτερη, με αποτέλεσμα έναν απλούστερο όρο στην εξίσωση.

