



Πανεπιστήμιο Κύπρου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών
Υπολογιστών

Εργαστήριο Κυκλωμάτων και Μετρήσεων

Εργαστήριο 8
Κυκλώματα RLC και Σταθερή Ημιτονοειδής Κατάσταση

Λευκωσία, 2010

Εργαστήριο 8

Κυκλώματα RLC και Σταθερή Ημιτονοειδής Κατάσταση

Σκοπός:

Σκοπός του εργαστηρίου αυτού είναι

- Να εξεταστεί η ημιτονοειδής απόκριση σταθερής κατάστασης σε κυκλώματα συντονισμού.
- Ο υπολογισμός και η μέτρηση της συχνότητας συντονισμού σε ένα κύκλωμα RLC σε σειρά
- Η μέτρηση και ο σχεδιασμός των τάσεων και των ρευμάτων σε συνάρτηση με τη συχνότητα για ένα κύκλωμα συντονισμού σειράς.
- Να αποδειχθεί πειραματικά ότι η σύνθετη αντίσταση εισαγωγής (input) είναι ελάχιστη στη συχνότητα συντονισμού.
- Να επαληθευτεί η σχέση μεταξύ του συντελεστή ποιότητας (Q) του κυκλώματος και του εύρους ζώνης (bandwidth).

Εργαστηριακός Εξοπλισμός

- Παλμογράφος (Oscilloscope)
- Γεννήτρια Συναρτήσεων (Function Generator)
- Πολύμετρο (DMM Multimeter)
- Μετρητής LRC
- Πλακέτα Κατασκευής Κυκλωμάτων (Breadboard)
- Σετ καλωδίων
- Αντιστάσεις: 1x10 Ω , 1x100 Ω , 1x 1 k Ω
- Πυκνωτές: 1x1 μ F
- Πηνία: 1x10 mH

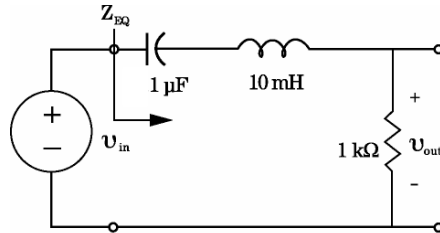
Προπαρασκευαστική Μελέτη

Πριν την παρακολούθηση του εργαστηρίου απαιτείται η μελέτη των

- Εργαστήριο 8 - Κυκλώματα RLC και Σταθερή Ημιτονοειδής Κατάσταση
- Διαβάστε το μέρος “Σταθερή Κατάσταση Ημιτονοειδών Σημάτων” του μαθήματος HMY102.
- Διαβάστε από ένα βιβλίο για κυκλώματα RLC και την φυσική συχνότητα (natural frequency) και το λόγο απόσβεσης (damping ratio).

Πρόβλημα 8.1 (Θεωρητική Άσκηση)

Βρείτε τη φυσική συχνότητα ω_0 και το λόγο απόσβεσης ζ στο σχήμα P1.



Σχήμα P1

Πρόβλημα 8.2 (SPICE)

1. Υλοποιήστε το κύκλωμα του σχήματος P1 σε SPICE, όπου V_{in} είναι μια ημιτονοειδής πηγή. Για συχνότητες πηγής από 10 Hz ως 100 kHz σε λογαριθμική κλίμακα δημιουργήστε τη γραφική παράσταση της σύνθετης αντίστασης $|Z_{eq}|$. Βρείτε τη συχνότητα συντονισμού.
2. Επίσης στο SPICE, δημιουργήστε γραφικές παραστάσεις της τάσης στα διάφορα στοιχεία (δηλ. R, L και C) καθώς και γραφικές παραστάσεις Bode για το $G = V_{out} / V_{in}$.

Θεωρία

Σταθερή Ημιτονοειδή Κατάσταση

Στη σταθερή ημιτονοειδή κατάσταση, η σύνθετη αντίσταση των τριών βασικών στοιχείων κυκλωμάτων σε συνάρτηση με τη συχνότητα είναι:

$$Z_R = R \quad (1)$$

$$Z_L = R_L + j\omega L \quad (2)$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \quad (3)$$

Σε εκθετικά κυκλώματα υπάρχει μια διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και ρεύματος η οποία καθορίζεται ως

$$\theta(\omega) = \angle T_V(\omega) = \angle V_{out} - \angle V_{in}.$$

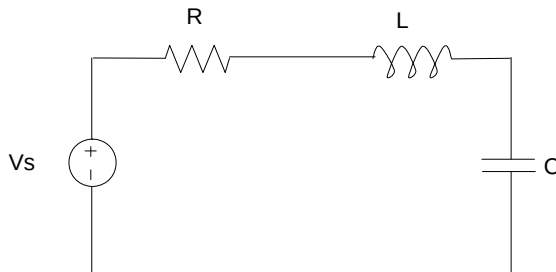
όπου

$$|T_V(j\omega)| = V_{out}(j\omega)/V_{in}(j\omega)$$

Κυκλώματα Συντονισμού RLC

Σε ένα κύκλωμα RLC σειράς, όπως πιο κάτω, υπάρχει μόνο μια συχνότητα όπου το μέτρο (magnitude) της σύνθετης αντίστασης του πηνίου είναι ίσο με το μέτρο της σύνθετης αντίστασης του πυκνωτή. Σε αυτήν τη συχνότητα

$$|jX_L| = |jX_C| \text{ ή } |R_L + j\omega L| = \left| \frac{1}{j\omega C} \right|$$



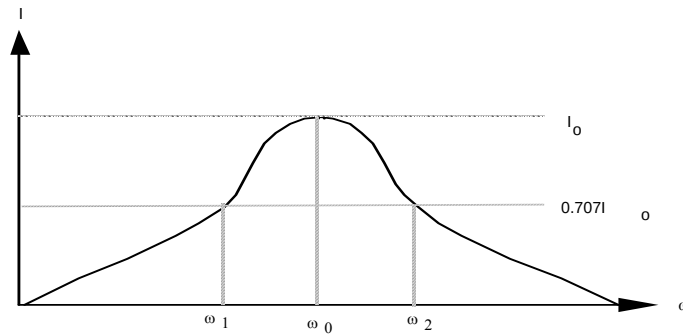
Αυτή η συχνότητα ονομάζεται συχνότητα συντονισμού (resonant frequency) του κυκλώματος και η τάση εισαγωγής και το ρεύμα βρίσκονται στην ίδια φάση. Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι πραγματική (real - resistive) αφού οι σύνθετες αντιστάσεις του πηνίου και του πυκνωτή αλληλοεξουδετερώνονται. Αυτό επίσης συνεπάγεται ότι σε συντονισμό το κύκλωμα έχει την ελάχιστη σύνθετη αντίσταση και το μέγιστο ρεύμα. Η συχνότητα συντονισμού ω_0 είναι

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \text{ ή } f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Ακόμα ένα χαρακτηριστικό του κυκλώματος είναι το εύρος ζώνης $\Delta\omega$ (bandwidth) του κυκλώματος που ορίζεται ως η διαφορά στις συχνότητες μισής ισχύος (half-power frequencies). Οι συχνότητες μισής ισχύος ορίζονται ως οι συχνότητες όπου η ισχύς είναι η μισή της ισχύς στη συχνότητα συντονισμού. Μια και η ισχύς είναι ανάλογη των V^2 ή I^2 τότε μπορούμε να καθορίσουμε το εύρος ως τη διαφορά όπου η τάση ή το ρεύμα είναι στο $1/\sqrt{2} = 0.707$ της μέγιστης του τιμής. Το εύρος είναι ίσο με

$$\Delta\omega = \frac{R}{L}$$

Το εύρος ζώνης φαίνεται και στο πιο κάτω σχήμα.

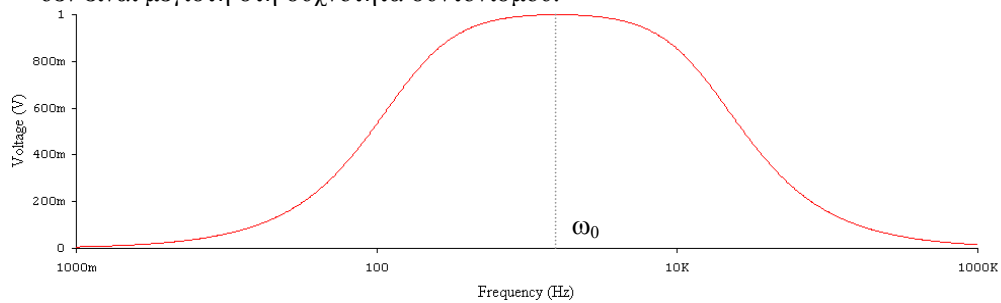


Το κύκλωμα επίσης έχει και ένα Q (συντελεστής ποιότητας – Quality Factor) το οποίο ορίζεται σαν

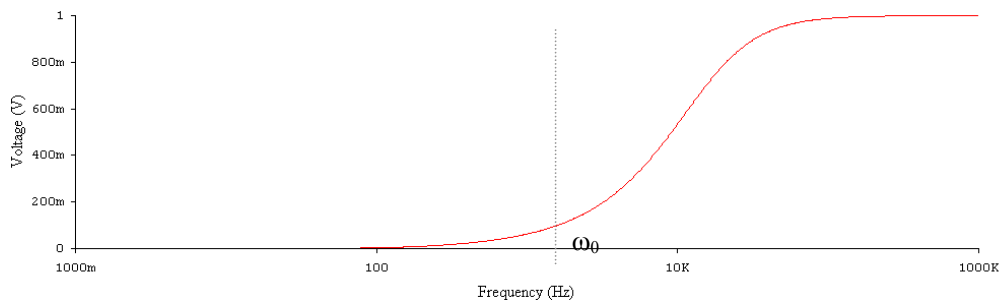
$$Q = \frac{\omega_0}{2\zeta} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

Οι τάσεις των τριών στοιχείων στο κύκλωμα σε συνάρτηση με τη συχνότητα, παρουσιάζουν τα εξής χαρακτηριστικά:

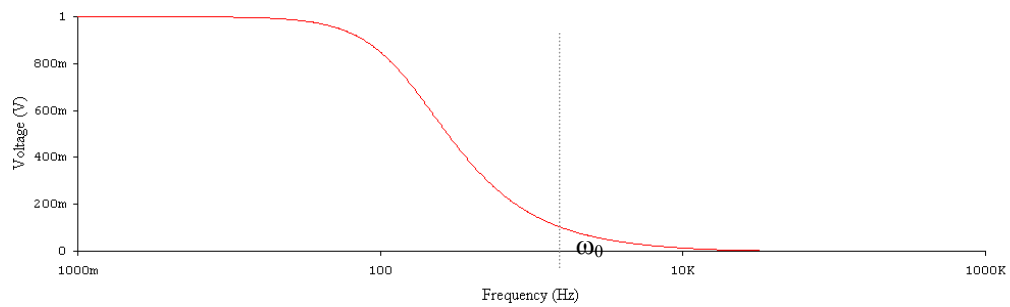
- Η τάση στα άκρα της αντίστασης έχει την ίδια μορφή με το ρεύμα με τη μέγιστη τιμή να εμφανίζεται στη συχνότητα συντονισμού (δεδομένου ότι ο νόμος του Ohm ισχύει).
- Οι τάσεις στα άκρα του πυκνωτή και του πηνίου είναι ίσες κατά το συντονισμό αλλά καμία δεν είναι μέγιστη στη συχνότητα συντονισμού.



Η τάση της αντίστασης σε συνάρτηση με τη συχνότητα.



Η τάση του πηνίου σε συνάρτηση με τη συχνότητα.

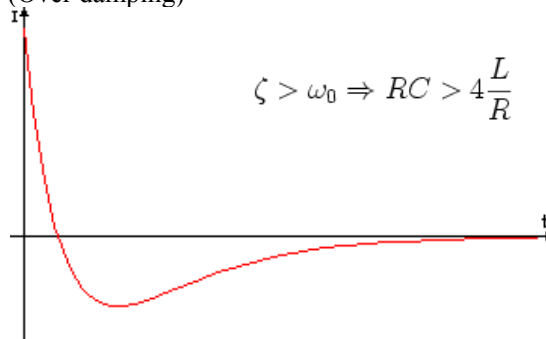


Η τάση του πυκνωτή σε συνάρτηση με τη συχνότητα.

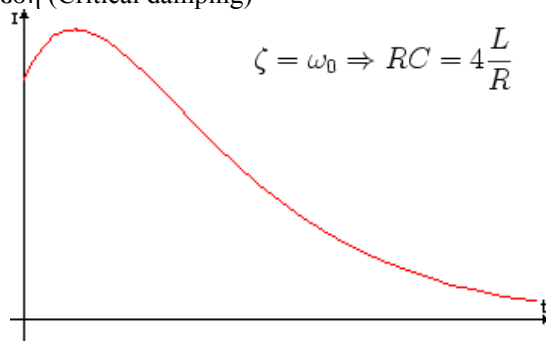
Ο λόγος απόσβεσης ενός κυκλώματος περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο το κύκλωμα θα φτάσει στη σταθερή του κατάσταση. Ο λόγος απόσβεσης είναι

$$\zeta = \frac{R}{2L} = \frac{\Delta\omega}{2}$$

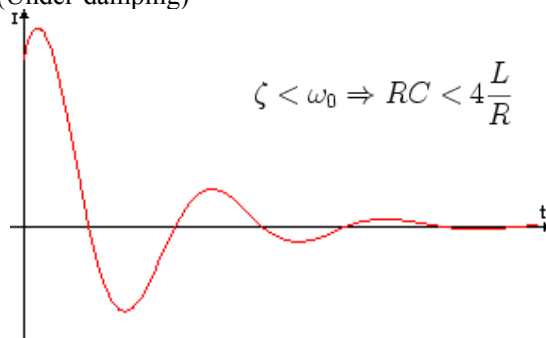
Υπεραπόσβεση (Over damping)



Κρίσιμη απόσβεση (Critical damping)

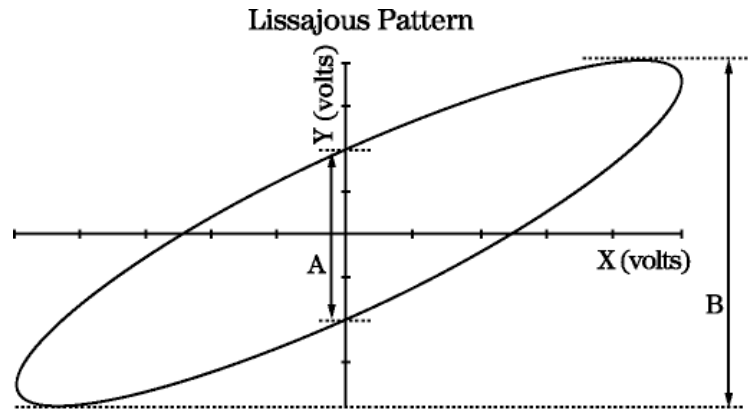


Υποαπόσβεση (Under-damping)



Σχήματα Lissajous στον παλμογράφο

Το σχήμα Lissajous μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη μέτρηση της γωνιάς φάσης μεταξύ δύο ημιτονοειδών σημάτων της ίδιας συχνότητας..



Σχήμα Lissajous

Για να δείτε ένα σχήμα Lissajous:

- a. Ρυθμίστε τον παλμογράφο σε X-Y mode. Από το “Horizontal Menu” επιλέξετε XY (F5).
- b. Ενώστε την τάση V_{in} στο X channel του παλμογράφου, και την τάση V_{out} στο Y channel.
- c. Ρυθμίστε τα VOLTS/DIV στο X και Y channels ούτως ώστε το σχήμα Lissajous να είναι όσο πιο μεγάλο γίνεται, αλλά να φαίνεται ολόκληρο στον παλμογράφο. Σε συχνότητες εκτός συντονισμού παίρνουμε κάτι παρόμοιο με το πιο πάνω σχήμα.
- d. Ελέγξτε ότι το σχήμα Lissajous είναι ακριβώς στο κέντρο της οθόνης. Εάν όχι να μετατοπιστεί για να έρθει στο κέντρο.
- e. Μετρήστε τις αποστάσεις A και B στο σχήμα χρησιμοποιώντας τους ενδείκτες (cursors). Η απόσταση A είναι η απόσταση μεταξύ των δύο τομών του σχήματος Lissajous με τον άξονα Y. Η B είναι η κάθετη απόσταση μεταξύ του επάνω και κάτω μέρους του σχήματος.
- f. Η γωνιά φάσης υπολογίζεται από την πιο κάτω εξίσωση:

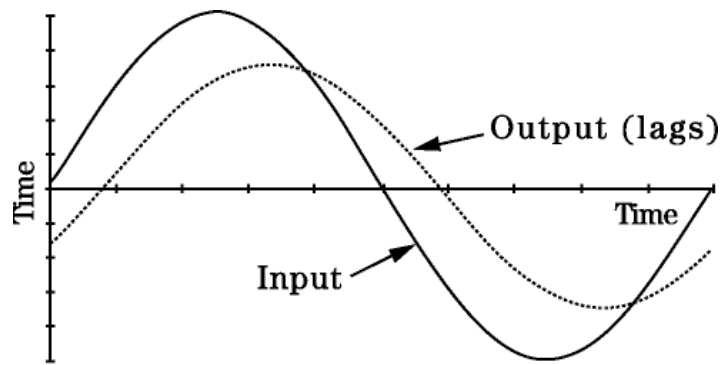
$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{A}{B}\right)$$

- g. Στη συχνότητα συντονισμού, η γωνία θ είναι 0 και άρα το σχήμα είναι μια διαγώνιος γραμμή, αφού το A είναι επίσης 0.

Το πρόσημο της γωνιάς φάσης δεν μπορεί να βρεθεί από το σχήμα Lissajous. Για να βρεθεί το πρόσημο της θ , ρυθμίστε τον παλμογράφο σε time-base (MAIN-F1) (όχι X-Y), και προσδιορίστε εάν το κύμα εξόδου οδηγεί (leads) ή ακολουθεί (lags) το σήμα εισόδου.

- a. Εντοπίστε το σημείο που το σήμα εισόδου διασχίζει το 0 με θετική κατεύθυνση και το κοντινότερο σημείο που το σήμα εξόδου διασχίζει το 0.
- b. Εάν το σημείο όπου το σήμα εξόδου διασχίζει τον άξονα είναι μετά από το σήμα εισόδου, όπως στο πιο κάτω σχήμα, τότε το σήμα εξόδου ακολουθεί (lags) και η γωνιά θ είναι αρνητική.

- c. Εάν το σημείο όπου το σήμα εξόδου διασχίζει τον άξονα είναι πριν από το σήμα εισόδου τότε το σήμα εξόδου οδηγεί (leads) και η γωνιά θ είναι θετική.



Σε συντονισμό, η μιγαδική αντίσταση είναι 0 και η σύνθετη αντίσταση είναι πραγματική (real and resistive). Δεδομένου ότι το φανταστικό μέρος της σύνθετης αντίστασης είναι μηδέν, $\text{Im}\{T_v(j\omega)\} = 0$, η γωνιά φάσης $\theta = 0$. Όλες οι συχνότητες πιο πάνω από το συντονισμό έχουν το ίδιο πρόσημο, και οι συχνότητες κάτω από το σημείο συντονισμού έχουν το αντίθετο πρόσημο.

Πειραματική Εργασία

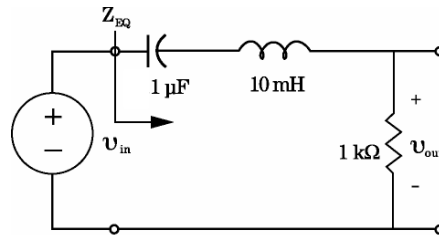
Εργαστηριακή Άσκηση 8.1 – Σταθερή Ημιτονοειδής Κατάσταση

Στόχοι

- Να εξεταστεί η ημιτονοειδής απόκριση σταθερής κατάστασης ενός κυκλώματος συντονισμού.

Διαδικασία

1. Κατασκευάστε το κύκλωμα του σχήματος 1.1. Ρυθμίστε το πλάτος της ημιτονοειδούς τάσης στα 2 V_{pp} (V_{amp} = 1 V), χωρίς offset (V_{avg} = 0) και συχνότητα 50 Hz.



Σχήμα 1.1

2. Ενώστε τον παλμογράφο έτσι ώστε να βλέπετε το σχήμα Lissajous από τα V_{in} και V_{out} . Βρείτε τη συχνότητα συντονισμού f_0 αλλάζοντας τη συχνότητα μέχρι το σχήμα Lissajous να γίνει μια διαγώνια γραμμή. Καταγράψτε τη συχνότητα της γεννήτριας συναρτήσεων και τη γωνιά φάσης σε συντονισμό.

$$f_0 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\theta = \underline{\hspace{2cm}}$$

3. Ξεκινώντας από μια συχνότητα 50 Hz, συμπληρώστε τη στήλη της συχνότητας του πίνακα 1.1 παίρνοντας λογαριθμικά βήματα (1, 2, 5, 10 κτλ.) μέχρι τη συχνότητα συντονισμού, f_0 . Προσθέστε τη συχνότητα συντονισμού και συνεχίστε πάλι παίρνοντας λογαριθμικά βήματα για ακόμα δύο δεκάδες.

4. Για κάθε μια από τις συχνότητες του πίνακα

- a. Με τη βοήθεια του σχήματος Lissajous, βρείτε τη γωνιά φάσης θ , μεταξύ V_{in} και V_{out} .
- b. Ρυθμίστε τον παλμογράφο να δείχνει V_{in} και V_{out} (time-base όχι X-Y) και καταγράψτε τις τιμές peak-to-peak της V_{in} και V_{out} .
- c. Καταγράψτε το πρόσημο της γωνίας φάσης για συχνότητες πάνω και κάτω από τη συχνότητα συντονισμού και διορθώστε το πρόσημο στο πίνακα 1.1. Ελέγξτε ότι αυτό ισχύει για ένα εύρος συχνότητας δύο δεκάδων γύρω από τη συχνότητα συντονισμού.

$$\text{Πρόσημο για } f < f_0 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{Πρόσημο για } f > f_0 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Πίνακας 1.1

[illegible]

5. Στη συχνότητα συντονισμού, τα V_{in} και V_{out} μπορεί να μην είναι ακριβώς ίσα. Γιατί;

Μετα-Εργαστηριακή Εργασία

Κάνετε δύο γραφικές παραστάσεις στο μιγαδικό επίπεδο της σύνθετης αντίστασης Z_{EQ} (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις θεωρητικές τιμές των στοιχείων) για το κύκλωμα του σχήματος 1.1. Για το πρώτο χρησιμοποιήστε μια συχνότητα $f_0/2$. Σχεδιάστε την Z_L και Z_C στο μιγαδικό άξονα και την Z_R στον πραγματικό άξονα. Σχεδιάστε την Z_{EQ} , η οποία είναι το διανυσματικό άθροισμα της Z_L , Z_C και Z_R . Δείξτε το μέτρο και τη γωνιά φάσης της Z_{EQ} . Επαναλάβετε αυτήν τη διαδικασία για μια συχνότητα $2f_0$.

Χρησιμοποιήστε την EXCEL για να υπολογίσετε το θεωρητικό V_{out}/V_{in} και τη γωνιά φάσης του κυκλώματος στο σχήμα 1.1. Θυμηθείτε ότι χρειάζεται διανυσματική πρόσθεση για να υπολογιστούν τα πιο πάνω.

Προσθέστε τις πειραματικές τιμές για $V_{in}(pp)$, $V_{out}(pp)$ και τη γωνιά από τον πίνακα στην EXCEL και υπολογίστε την V_{out} / V_{in} (gain) από τις πειραματικές τιμές peak-to-peak. Κατασκευάστε, επίσης, τη γραφική παράσταση Bode του κυκλώματος στο σχήμα 1.1 (Η γραφική παράσταση Bode, χρησιμοποιεί λογαριθμικούς άξονες για τη συχνότητα και το gain και κανονικούς άξονες για τη γωνιά). Χρησιμοποιήστε διαρκή γραμμή για να σχεδιάσετε τις εμπειρικές τιμές και μια διακεκομμένη γραμμή για τις θεωρητικές τιμές.

Εργαστηριακή Άσκηση 8.2 – R-L-C Κυκλώματα Συντονισμού

Στόχοι

- Υπολογισμός και μέτρηση της συχνότητας συντονισμού σε ένα κύκλωμα RLC σε σειρά
- Μέτρηση και σχεδιασμός των τάσεων και των ρευμάτων σε συνάρτηση με τη συχνότητα για ένα κύκλωμα συντονισμού σειράς.
- Να αποδειχθεί πειραματικά ότι η σύνθετη αντίσταση εισαγωγής (input) είναι ελάχιστη στη συχνότητα συντονισμού.
- Να επαληθευτεί η σχέση μεταξύ του Q του κυκλώματος και του εύρους ζώνης (bandwidth).

Διαδικασία

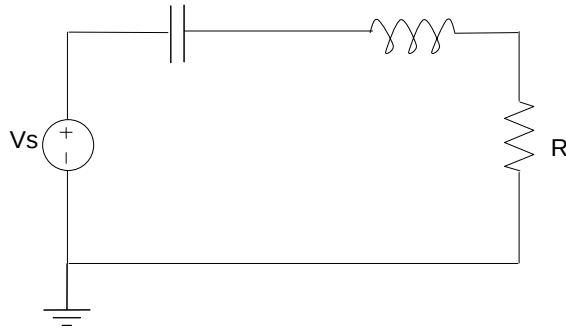
1. Σχεδιάστε ένα κύκλωμα συντονισμού σειράς με τα πιο κάτω χαρακτηριστικά:

$$L = 10 \text{ mH}$$

$$R_L = 15 \Omega$$

$$I_{\text{rms MAXIMUM}} = 2 \text{ mA}$$

$$f_0 = 100 \text{ kHz} \quad Q = 2\pi$$



2. Βρείτε τις τιμές R, C, και την τάση της γεννήτριας συναρτήσεων Vs.

$$R = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$C = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$V_{\text{s rms}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

3. Μετρήστε τις πραγματικές τιμές των στοιχείων και υπολογίστε τα f_0 και Q.

Μετρήσεις

$$R = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$R_L = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$L = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$C = \underline{\hspace{2cm}}$$

Υπολογισμοί από μετρήσεις

$$f_0 = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$\Delta\omega = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$Q = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$I_{\text{rms MAX}} = \underline{\hspace{4cm}}$$

4. Κατασκευάστε το κύκλωμα και θέστε τη γεννήτρια συναρτήσεων στην κατάλληλη τάση.
5. Οι μετρήσεις σας πρέπει να καθορίσουν πόσο κοντά είσαστε στο I_{max} , f_0 , $\Delta\omega$ και Q για το οποίο σχεδιάσατε το κύκλωμα. Ποια διαδικασία θα ακολουθήσετε για να μετρήσετε αυτές τα f_0 , I_{max} , $\Delta\omega$ και Q ;

6. Ποια είναι τα πραγματικά χαρακτηριστικά του κυκλώματος;

$$f_0 = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$I_{\text{MAX rms}} = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$\Delta\omega = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$Q = \underline{\hspace{4cm}}$$

7. Τι παρατηρείτε;

8. Ρυθμίστε τη γεννήτρια συναρτήσεων έτσι ώστε να παράγει ένα ημιτονοειδές κύμα με συχνότητα 4 φορές τη συχνότητα συντονισμού. Επιβεβαιώστε ότι η συχνότητα είναι $4f_0$ με τη βοήθεια του παλμογράφου. Βεβαιωθείτε ότι το πλάτος είναι ακόμα $2 V_{\text{rms}}$.
9. Μετρήστε, χρησιμοποιώντας το πολύμετρο την τάση rms της V_R . Καταγράψτε τα αποτελέσματα στον πίνακα 2.1. Υπολογίστε το ρεύμα I χρησιμοποιώντας το νόμο του Ohm και τις τιμές της R

και V_R . Υπολογίστε το πλάτος της συνολικής σύνθετης αντίστασης, $|Z|$, με την εξίσωση που δίνεται στον πίνακα.

10. Επαναλάβετε τα πιο πάνω βήματα για όλες τις συχνότητες του πίνακα 2.1 και συμπληρώστε τον πίνακα.

Πίνακας 2.1

Frequency	$V_s(\text{rms})$	$V_R(\text{rms})$	$I(\text{rms}) = \frac{V_R(\text{rms})}{R(\text{rms})}$	$Z = \frac{V_s(\text{rms})}{I(\text{rms})}$
$4f_0$				
$2f_0$				
$1.1 f_0$				
f_0				
$0.9f_0$				
$1/2f_0$				
$1/4f_0$				
$1/8f_0$				

11. Τι συμπεραίνετε για την σύνθετη αντίσταση σε σχέση με τη συχνότητα ;

Μετά-εργαστηριακή Εργασία

1. Αξιολογήστε πόσο καλά το κύκλωμα που σχεδιάσατε στο βήμα 8 συγκρίνεται με τις προδιαγραφές; Πώς θα βελτιώνετε το σχέδιο την επόμενη φορά;
2. Σχεδιάστε την Z σε συνάρτηση με τη συχνότητα για τα αποτελέσματα στον πίνακα 2.1.

Σε συντονισμό, συγκρίνετε τη σύνθετη αντίσταση Z με τη συνολική αντίσταση του κυκλώματος (R).

Περιγράψτε πώς η σύνθετη αντίσταση εισαγωγής ενός κυκλώματος συντονισμού σειράς αλλάζει με τη συχνότητα. Ποιο στοιχείο έχει την περισσότερη επίδραση στη σύνθετη αντίσταση στα υψηλά και χαμηλά όρια του φάσματος συχνότητας;

3. Σχεδιάστε το I σε συνάρτηση με τη συχνότητα για τα αποτελέσματα στον πίνακα 2.1.

Πώς συγκρίνεται το μέγιστο ρεύμα με $\frac{V_s}{R}$;

Από τη γραφική παράσταση, βρείτε τις δύο συχνότητες μισής ισχύς f_1 και f_2 (όπου το I είναι 0.707 της μέγιστης τιμής). Υπολογίστε το εύρος ζώνης BW .

Χρησιμοποιώντας τις μετρημένες τιμές των αντιστάσεων βρείτε τον παράγοντα ποιότητας Q ($Q = \frac{\omega_o L}{R}$).

Χρησιμοποιώντας το εύρος ζώνης (BW) και τη συχνότητα συντονισμού από τη γραφική παράσταση να βρείτε το Q ($Q = f_o/BW$). Συγκρίνετε με το προηγούμενο αποτέλεσμα.

4. Σχεδιάστε τις rms τιμές της V_R σε συνάρτηση με τη συχνότητα.
5. Σε ποια συχνότητα η V_R είναι μέγιστη? Οι μέγιστες τιμές των V_C και V_L εμφανίζονται στην ίδια συχνότητα; Εξηγήστε γιατί.