



## Διάλεξη 1

# Εισαγωγή Σήματα και Συστήματα Διακριτού Χρόνου

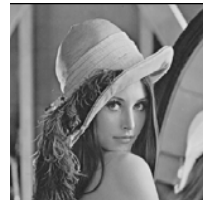
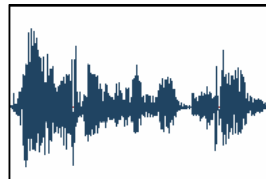


## Εισαγωγή



### • Τι είναι σήμα;

- Είναι μεταβολές ενός φυσικού μεγέθους που αναπαριστούν ή μεταφέρουν πληροφορίες
- Είναι συνάρτηση ανεξάρτητων μεταβλητών, όπως χρόνου (π.χ. φωνή), ή θέσης (π.χ. εικόνα)
- Συνήθως αναφερόμαστε στη μεταβλητή μονοδιάστατων σημάτων ως χρόνο χωρίς κατ' ανάγκη να είναι πραγματικά χρόνος



### • Παραδείγματα

- Φωνή  $[1d, s(t)]$
- Ασπρόμαυρη εικόνα  $[2d, i(x,y)]$
- Βίντεο  $[3x3d, \{r(x,y,t), g(x,y,t), b(x,y,t)\}]$

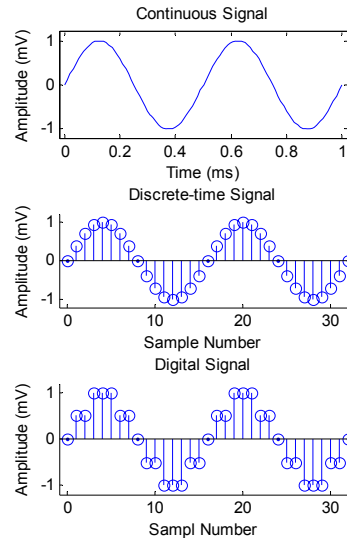




## Εισαγωγή



- Η μεταβλητή μπορεί να είναι **συνεχής (continuous)** ή **διακριτή (discrete)**
  - Σήματα συνεχούς χρόνου
  - Σήματα διακριτού χρόνου (ορίζονται σε διακριτά σημεία χρόνου και συμβολίζονται ως ακολουθίες (sequences) αριθμών)
- Το **πλάτος (amplitude)** του σήματος μπορεί να είναι **συνεχές** ή **διακριτό**
  - Αναλογικά (analog) σήματα (τόσο ο χρόνος όσο και το πλάτος είναι συνεχής)
  - Ψηφιακά σήματα (τόσο ο χρόνος όσο και το πλάτος είναι διακριτά)
- Η **ανάλυση ψηφιακών σημάτων και σημάτων διακριτού χρόνου ακολουθεί τις ίδιες γραμμές**
  - Διαφορές λόγω δειγματοληψίας και ψηφιοποίησης του πλάτους
  - Οι υπολογιστές επεξεργάζονται εξ' ανάγκης ψηφιακά σήματα



3

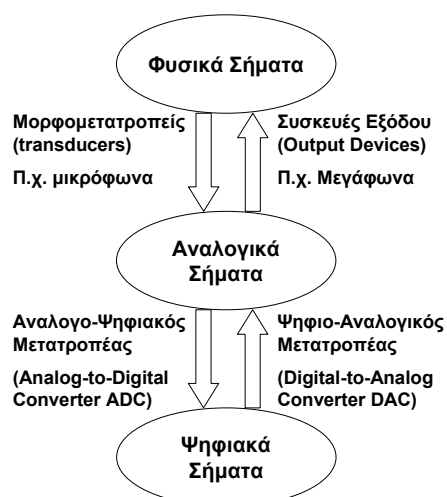
Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



## Εισαγωγή



- **Ψηφιακή επεξεργασία σημάτων**
  - Τροποποίηση και ανάλυση της πληροφορίας
  - Αναπαράσταση, μετασχηματισμός και χειρισμός των σημάτων και της πληροφορίας που περιέχουν
- **Υπέρ**
  - Εύκολη αναπαραγωγή
  - Σταθερότητα και ευρωστία, δεν μεταβάλλεται με το περιβάλλον (π.χ. θερμοκρασία) και με την αποθήκευση
  - Ευελιξία και δυνατότητα αναβάθμισης (υπολογιστής ή γενικής χρήσης μικροεπεξεργαστής)
- **Κατά**
  - Περιορισμοί του συστήματος ψηφιοποίησης (ADC/DAC)
  - Ψηλά κατανάλωση ισχύος
  - Ακατάλληλη για απλές, χαμηλής ισχύος εφαρμογές
  - Εύρος ζώνης (bandwidth) περιορίζεται από τη ψηφιοποίηση



4

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



## Εισαγωγή



### • Ιστορικά Στοιχεία

- Πριν από τη δεκαετία του 50 → επεξεργασία αναλογικών σημάτων με ηλεκτρονικά ή μηχανικά μέσα
- Δεκαετία 50 → προσομοιώσεις πριν την κατασκευή του αναλογικού επεξεργαστή
- 1965 → Fast Fourier Transform (FFT) από τους Cooley and Tukey δίνει τη δυνατότητα επεξεργασίας πραγματικού χρόνου
- Δεκαετία του 80 → Ολοκληρωμένα κυκλώματα για επεξεργασίας σημάτων

### • Εφαρμογές

- Ανάλυση ομιλίας
  - Βελτίωση, αφαίρεση θορύβου
  - Κωδικοποίηση
  - Σύνθεση ομιλίας από κείμενο (text-to-speech synthesis)
  - Αναγνώριση
- Ανάλυση Εικόνας
  - Βελτίωση, κωδικοποίηση, αναγνώριση (π.χ. OCR)
- Επεξεργασία πολυμέσων
  - Μετάδοση σημάτων
  - Ψηφιακή τηλεόραση
  - Τηλεδιάσκεψη
- Επικοινωνίες
- Βιοϊατρική Τεχνολογία
- Πλοήγηση, ραντάρ, GPS
- Έλεγχος, ρομποτική, συστήματα μηχανικής όρασης (machine vision)

5

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



## Σήματα Διακριτού Χρόνου



### • Ακολουθία αριθμών

$$x = \{x[n]\} \quad -\infty < n < +\infty$$

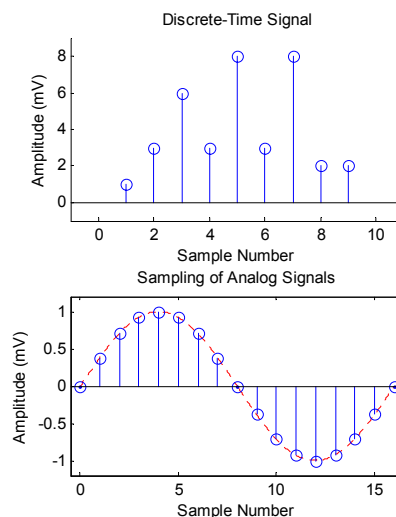
$$x[n]$$

- όπου  $n$  είναι ακέραιος

### • Περιοδική ψηφιοποίηση αναλογικού σήματος

$$x[n] = x_a(nT) \quad -\infty < n < +\infty$$

- όπου  $T$  είναι η περίοδος δειγματοληψίας



6

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



## Σήματα Διακριτού Χρόνου



- **Βασικές πράξεις**

- Πρόσθεση δυο σημάτων  $\rightarrow$  πρόσθεση δείγμα με δείγμα

$$y[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

$$y[0] = x_1[0] + x_2[0], y[1] = x_1[1] + x_2[1] \dots etc$$

- Πολλαπλασιασμός δυο σημάτων  $\rightarrow$  πολλαπλασιασμός δείγμα με δείγμα

$$y[n] = x_1[n]x_2[n]$$

$$y[0] = x_1[0]x_2[0], y[1] = x_1[1]x_2[1] \dots etc$$

- Καθυστέρηση (delay) ή μετατόπιση (shift) ενός σήματος

$$y[n] = x[n - n_0]$$

Όπου  $n_0$  είναι ακέραιος

7

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



## Σήματα Διακριτού Χρόνου



- **Κρουστική συνάρτηση διακριτού χρόνου (discrete time impulse)**

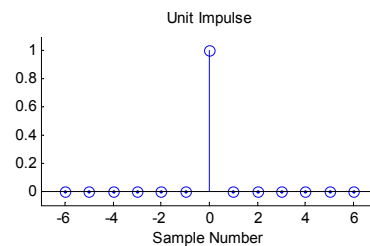
$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

- Κάθε συνάρτηση μπορεί να αναπαρασταθεί ως μια σειρά από κλιμακωμένες και μετατοπισμένες κρουστικές συναρτήσεις

$$x[n] = \dots + a_{-1}\delta[n+1] + a_0\delta[n] + a_{+1}\delta[n-1] + \dots$$

- Πιο γενικά

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$



8

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory

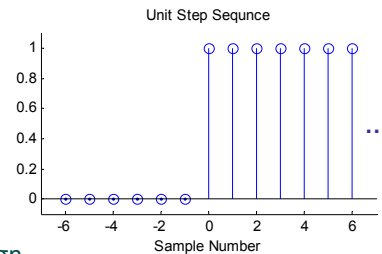


## Σήματα Διακριτού Χρόνου



- Βηματική συνάρτηση διακριτού χρόνου (step sequence)

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



- Σχετίζεται με την κρουστική συνάρτηση

$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \dots$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k] \delta[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

9

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



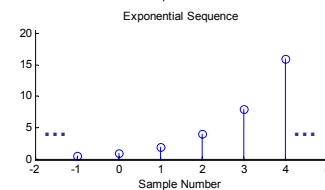
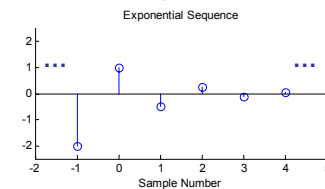
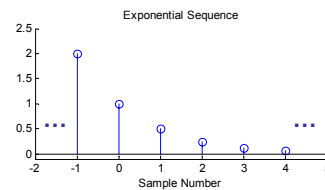
## Σήματα Διακριτού Χρόνου



- Εκθετικές συναρτήσεις (exponential sequence)

$$x[n] = Aa^n$$

- Αν A και a είναι πραγματικοί αριθμοί τότε η συνάρτηση είναι επίσης πραγματική
- Συμπεριφορά για
  - $0 < a < 1$
  - $-1 < a < 0$
  - $|a| > 1$



10

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



## Σήματα Διακριτού Χρόνου



- **Ημιτονοειδείς Συναρτήσεις**

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi) \quad \text{for all } n$$

- Γενική περίπτωση

$$x[n] = Aa^n$$

- $a$  και  $A$  μιγαδικοί  $\rightarrow$  Εκθετικά σταθμισμένες (exponentially weighted) ημιτονοειδείς συναρτήσεις

$$x[n] = Aa^n = A |e^{j\phi}| |a|^n e^{j\omega_0 n} = A ||a|^n e^{j(\omega_0 n + \phi)} \quad a = |a| e^{j\omega_0}$$

$$x[n] = A ||a|^n \cos(\omega_0 n + \phi) + j |A| |a|^n \sin(\omega_0 n + \phi) \quad A = |A| e^{j\phi}$$

- $|a| = 1$

$$x[n] = A |\cos(\omega_0 n + \phi) + j |A| \sin(\omega_0 n + \phi)$$

- Κατ' αναλογία με τα συνεχή σήματα

- $\omega$  = συχνότητα
- $\Phi$  = φάση

11

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



## Σήματα Διακριτού Χρόνου



- **Σημαντικές διαφορές λόγω της διακριτότητας (n είναι πάντοτε ακέραιος)**

### 1. Εύρος συχνοτήτων

- Το ημιτονοειδές με συχνότητα  $\omega_0 + 2\pi r$  δεν διαφέρει από αυτό με συχνότητα  $\omega_0$

$$x[n] = Ae^{j(\omega_0 + 2\pi r)n} = Ae^{j\omega_0 n} e^{j2\pi rn} = Ae^{j\omega_0 n}$$

- Μπορούμε να διερευνούμε ένα εύρος συχνοτήτων μόνο

$$-\pi < \omega_0 \leq \pi \quad \text{or} \quad 0 \leq \omega_0 < 2\pi$$

12

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



## Σήματα Διακριτού Χρόνου



### 2. Στο διακριτό χρόνο μια συνάρτηση είναι περιοδική όταν

$$x[n] = x[n + N], \quad \text{for all } n$$

όπου  $N$  είναι ακέραιος

- Για ημιτονοειδείς συναρτήσεις αυτό σημαίνει

$$A \cos(\omega_0 n + \phi) = A \cos(\omega_0 n + \omega_0 N + \phi) \Rightarrow$$

$$\omega_0 N = 2\pi k \quad \text{or} \quad N = \frac{2\pi k}{\omega_0}$$

όπου  $k$  ο μικρότερος δυνατός ακέραιος

- Οι ημιτονοειδείς συναρτήσεις δεν είναι κατ' ανάγκη περιοδικές με συχνότητα  $\omega_0/2\pi$
- Για κάποιες τιμές  $\omega_0$  δεν είναι καν περιοδικές!

13

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



## Σήματα Διακριτού Χρόνου



- Παραδείγματα

$$x_1[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) \Rightarrow N = \frac{2\pi k}{\pi/4} = 8 \quad \text{for } k=1$$

$$x_2[n] = \cos\left(\frac{3\pi}{8}n\right) \Rightarrow N = \frac{2\pi k}{3\pi/8} = 16 \quad \text{for } k=3$$

$$x_3[n] = \cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right) \Rightarrow N = \frac{2\pi k}{3\pi/4} = 8 \quad \text{for } k=3$$

$$x_4[n] = \cos(2n) \Rightarrow N = \frac{2\pi k}{2} = \text{impossible for any } k$$

- Για τα  $x_1$  και  $x_2$ , αυξάνεται η συχνότητα, αυξάνεται και η περίοδος!
- Το  $x_4$  είναι ημιτονοειδές με συχνότητα  $\omega_0=2$  αλλά δεν είναι περιοδικό!
- Τα  $x_1$  και  $x_3$  έχουν την ίδια περίοδο!

14

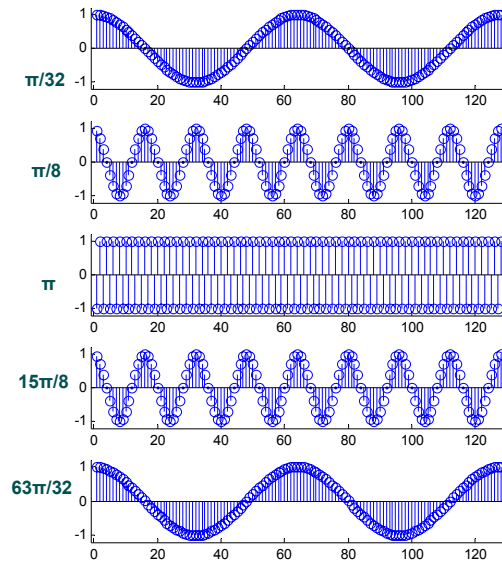
Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



## Σήματα Διακριτού Χρόνου



3. Στο διακριτό χρόνο η περίοδος μιας ημιτονοειδούς συνάρτησης αυξάνεται μέχρι  $\pi$  και μετά μειώνεται ξανά μέχρι το  $2\pi$



## Συστήματα Διακριτού Χρόνου



- Ένας μετασχηματισμός (transformation) ή χειρισμός (operation) που μεταφέρει το σήμα εισόδου στο σήμα εξόδου

- $y[n] = T\{x[n]\}$

- Παραδείγματα:

- Το ιδεατό σύστημα καθυστέρησης
    - $y[n] = x[n - n_d]$ ,  $-\infty < n < \infty$
  - Σύστημα χωρίς μνήμη
    - $y[n] = (x[n])^2$ ,  $-\infty < n < \infty$







## Συστήματα Διακριτού Χρόνου



- Ένα σύστημα είναι γραμμικό (**linear**) αν και μόνο αν

- Επαλληλία (superposition)

$$y[n] = T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\}$$

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n]$$

- Αναλογικότητα (scaling)

$$T\{ax[n]\} = aT\{x[n]\} = ay[n]$$

$$y[n] = T\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\}$$

$$y[n] = a_1T\{x_1[n]\} + a_2T\{x_2[n]\}$$

$$y[n] = a_1y_1[n] + a_2y_2[n]$$

- Ένα σύστημα είναι χρονικά αναλλοίωτο (**time-invariant**) αν

- Μια καθυστέρηση ή μετατόπιση του σήματος εισόδου προκαλεί μια ίση μετατόπιση του σήματος εξόδου

$$x_1[n] = x[n - n_0] \Rightarrow y_1[n] = y[n - n_0]$$

- Ένα σύστημα είναι αιτιατό (**causal**) αν

- Η τιμή του σήματος εξόδου σε χρόνο  $n=n_0$  εξαρτάται μόνο από τις τιμές εισόδου για  $n \leq n_0$ .

- Παράδειγμα

$$y[n] = x[n - n_0], -\infty < n < \infty$$

→ Αιτιατό για  $n_0 \geq 0$

→ Μη αιτιατό για  $n_0 < 0$

- Ένα σύστημα είναι ευσταθές (**stable**) με ΦΕΦΕ (BIBO) αν και μόνο αν

- Κάθε φραγμένο σήμα εισόδου (bounded input sequence) δίνει φραγμένο σήμα εξόδου (bounded output sequence).

- Παράδειγμα

$$y[n] = (x[n])^2, -\infty < n < \infty$$

→ ευσταθές



## Συστήματα Διακριτού Χρόνου



- Γραμμικά, Χρονικά-Αναλλοίωτα Συστήματα (Linear Time-Invariant Systems)

- Σημαντικά λόγω της ευκολίας ανάλυσης αλλά και των πολλαπλών εφαρμογών
- Ένα ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται εξ' ολοκλήρου από την κρουστική απόκριση του

$$y[n] = T\{x[n]\} = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right\}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]$$

$$h_k[n] = h[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n-k] = x[n] * h[n]$$



## Συστήματα Διακριτού Χρόνου



### • Συνέλιξη

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

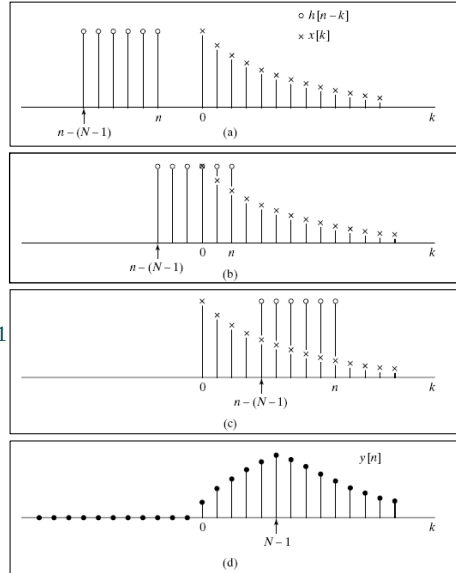
- Βρίσκετε το  $h[n-k]$ 
  - Αντιστρέφετε το  $h[k]$  γύρω από το 0 για να βρείτε το  $h[-k]$
  - Μετατοπίζεται κατά  $k=n$
- Πολλαπλασιάζετε το  $x[k]$  με το  $h[n-k]$  για  $-\infty < k < \infty$
- Προσθέτετε τα αποτελέσματα για βρείτε το  $y[n]$

### • Παράδειγμα

$$h[n] = u[n] - u[n-N] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$x[n] = a^n u[n]$$

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, & 0 \leq n \leq N-1 \\ a^{n-N+1} \frac{1-a^N}{1-a}, & n > N-1 \end{cases}$$



19

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



## Συστήματα Διακριτού Χρόνου



### • Ιδιότητες ΓΧΑ συστημάτων

- Αντιστρεφόμενα (commutative)  
 $x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$
- Γραμμικά (Linear)  
 $x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$
- Διάταξη σε σειρά  
 $h[n] = h_1[n] * h_2[n]$
- Παράλληλη Διάταξη  
 $h[n] = h_1[n] + h_2[n]$

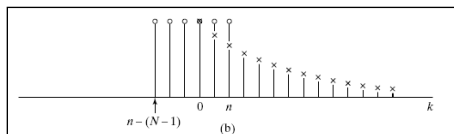
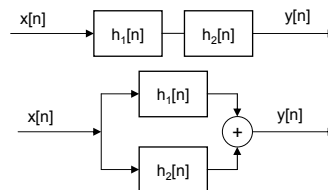
### • Άλλες ιδιότητες

- Ευστάθεια (Stability)

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

- Απαισιότητα (Causality)

$$h[n] = 0, \quad n < 0$$



20

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



## Συστήματα Διακριτού Χρόνου

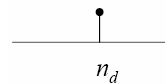


### • Συστήματα με πεπερασμένη κρουστική απόκριση (Finite Impulse Response – FIR)

- Ιδανική καθυστέρηση (ideal delay)

$$y[n] = x[n - n_d], \quad -\infty < n < \infty$$

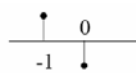
$$h[n] = \delta[n - n_d], \quad n_d \text{ a positive integer.}$$



- Διαφορά προς τα εμπρός (forward difference)

$$y[n] = x[n+1] - x[n]$$

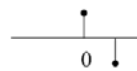
$$h[n] = \delta[n+1] - \delta[n]$$



- Διαφορά προς τα πίσω

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$



- Η κρουστική απόκριση έχει μόνο ένα πεπερασμένο (finite) αριθμό από μη-μηδενικά στοιχεία (non-zero samples)

21

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



## Συστήματα Διακριτού Χρόνου

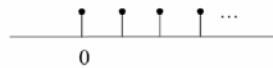


### • Συστήματα με άπειρη κρουστική απόκριση (Infinite Impulse Response – IIR)

- Συσσωρευτής (Accumulator)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k] = u[n]$$



- Η κρουστική απόκριση έχει άπειρη διάρκεια

- Σταθερότητα  $S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$

- Τα FIR συστήματα είναι πάντα σταθερά αν η κρουστική απόκριση έχει πεπερασμένο πλάτος

- Τα IIR συστήματα είναι σταθερά μόνο σε κάποιες περιπτώσεις, πχ

$$h[n] = a^n u[n] \text{ with } |a| < 1$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = 1/(1 - |a|) < \infty$$

22

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory