University of Cyprus
Biomedical Imaging & Applied Optics

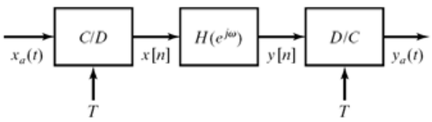
Διάλεξη 10

Σχεδιασμός Φίλτρων

Κεφ. 7.0-7.2

Σχεδιασμός Φίλτρων

- **Φίλτρο**
  - Διαφοροποιεί το φάσμα ενός σήματος
  - Π.χ. αφήνει να περάσουν ή σταματά κάποιες συχνότητες
- **Σχεδιασμός Φίλτρου**
  - Καθορίζονται τα χαρακτηριστικά (specifications)
  - **Υπολογίζεται, κατά προσέγγιση, ένα σταθερό και αιτιατό φίλτρο διακριτού χρόνου (ονομάζονται και ψηφιακά φίλτρα – digital filters)**
  - Το φίλτρο πραγματοποιείται (με υλικό ή λογισμικό)
- **Στον ψηφιακό κόσμο τα φίλτρα δεν είναι απολύτως αναγκαίο να είναι αιτιατά!**
- **Για επεξεργασία αναλογικών ψηφιοποιημένων σημάτων**
  - Καθορισμός φίλτρου και στις συχνότητες συνεχούς χρόνου



$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| > \pi/T. \end{cases}$$

$$\omega = \Omega T.$$

$$H(e^{j\omega}) = H_{\text{eff}}\left(j\frac{\omega}{T}\right), \qquad |\omega| < \pi.$$

Σχεδιασμός Φίλτρων

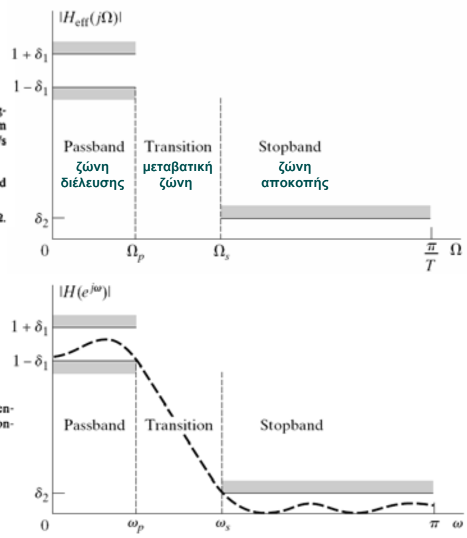
Example 7.1 Determining Specifications for a Discrete-Time Filter

Consider a discrete-time filter that is to be used to lowpass filter a continuous-time signal using the basic configuration of Figure 7.1. Specifically, we want the overall system of that figure to have the following properties when the sampling rate is 10^4 samples/s ($T = 10^{-4}$ s):

1. The gain $|H_{\text{eff}}(j\Omega)|$ should be within ± 0.01 of unity in the frequency band $0 \le \Omega \le 2\pi(2000)$.
2. The gain should be no greater than 0.001 in the frequency band $2\pi(3000) \le \Omega$.

$$\delta_1 = 0.01,$$
$$\delta_2 = 0.001,$$
$$\Omega_p = 2\pi(2000),$$
$$\Omega_s = 2\pi(3000).$$

Since the sampling rate is 10^4 samples/s, the gain of the overall system is identically zero above $\Omega = 2\pi(5000)$, due to the ideal discrete-to-continuous (D/C) converter in Figure 7.1.



Σχεδιασμός Φίλτρων

- **Σχεδιασμός Ψηφιακών Φίλτρων Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης (IIR - Infinite Impulse Response) από Αντίστοιχα Συνεχούς Χρόνου**
  - Υπάρχουν πολλές τεχνικές για σχεδιασμό φίλτρων συνεχούς χρόνου που μπορούμε να τις εκμεταλλευτούμε
- **Σχεδιασμός φίλτρων IIR με βάση την αμεταβλητότητα της κρουστικής απόκρισης (impulse invariance)**
  - Όταν το σήμα έχει πεπερασμένο φάσμα (band limited) → κρουστική απόκριση από ψηφιοποίηση της συνεχούς κρουστικής απόκρισης
  - Πρέπει να αποφεύγεται αλλοίωση του φίλτρου από αναδίπλωση (aliasing)
    - Συνήθως σχεδιάζουμε φίλτρου συνεχούς χρόνου με αυστηρότερες προδιαγραφές από ότι χρειάζεται
  - Δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για φίλτρα μη-πεπερασμένου (non-bandlimited) φάσματος

$$h[n] = T_d h_c(nT_d),$$

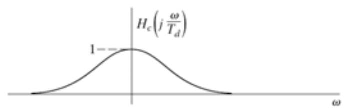
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\frac{\omega}{T_d} + j\frac{2\pi}{T_d}k\right).$$

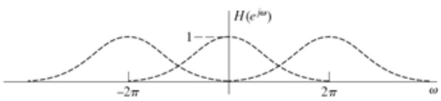
Αν

$$H_c(j\Omega) = 0, \qquad |\Omega| \ge \pi/T_d,$$

Τότε

$$H(e^{j\omega}) = H_c\left(j\frac{\omega}{T_d}\right), \qquad |\omega| \le \pi;$$





Σχεδιασμός Φίλτρων

- **Σχεδιασμός φίλτρων IIR με βάση την αμεταβλητότητα της κρουστικής απόκρισης (impulse invariance)**
  - Αν το φίλτρο συνεχούς χρόνου είναι

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k}.$$

  - Πόλοι στο $s = s_k$

$$h_c(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

$$h[n] = T_d h_c(nT_d) = \sum_{k=1}^{N} T_d A_k e^{s_k n T_d} u[n] = \sum_{k=1}^{N} T_d A_k (e^{s_k T_d})^n u[n].$$

- Τότε το φίλτρο διακριτού χρόνου είναι

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{T_d A_k}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}}.$$

  - Πόλοι στο $z_k = e^{s_k T_d}$

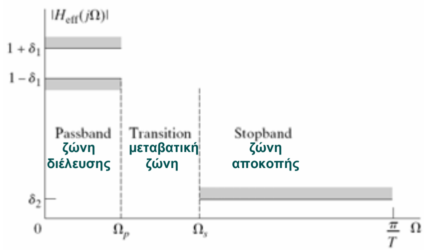
Σχεδιασμός Φίλτρων

Example 7.2 Impulse Invariance with a Butterworth Filter

Let us consider the design of a lowpass discrete-time filter by applying impulse invariance to an appropriate Butterworth continuous-time filter.[2] The specifications for the discrete-time filter are

$$0.89125 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1, \qquad 0 \leq |\omega| \leq 0.2\pi, \tag{7.13a}$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq 0.17783, \qquad 0.3\pi \leq |\omega| \leq \pi. \tag{7.13b}$$



Μια και η Td στο τέλος απαλείφεται μπορούμε να επιλέξουμε Td =1

$$\omega = \Omega.$$

$$0.89125 \leq |H_c(j\Omega)| \leq 1, \qquad 0 \leq |\Omega| \leq 0.2\pi,$$

$$|H_c(j\Omega)| \leq 0.17783, \qquad 0.3\pi \leq |\Omega| \leq \pi.$$

Το φίλτρο Butterworth είναι

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}},$$

$$|H_c(j0.2\pi)| \geq 0.89125$$

Πρέπει να λύσουμε τις εξισώσεις

$$\left. \begin{aligned} 1 + \left(\frac{0.2\pi}{\Omega_c}\right)^{2N} &= \left(\frac{1}{0.89125}\right)^2 \\ 1 + \left(\frac{0.3\pi}{\Omega_c}\right)^{2N} &= \left(\frac{1}{0.17783}\right)^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} N &= 5.8858 \\ \Omega_c &= 0.70474. \end{aligned}$$

Το Ν πρέπει να είναι ακέραιος

$$N = 6, \quad \Omega_c = 0.7032.$$

Με το Ν=6 τα χαρακτηριστικά της ζώνης διέλευσης είναι ακριβώς τα αναμενόμενα, ενώ τα υπερβαίνουμε στη ζώνη αποκοπής

Τώρα πρέπει να βρούμε τους πόλους του φίλτρου ....

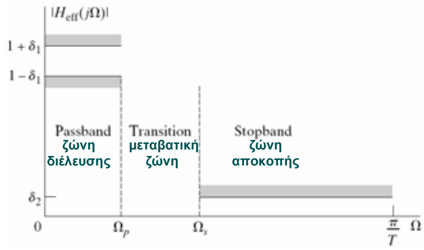
Σχεδιασμός Φίλτρων

Example 7.2 Impulse Invariance with a Butterworth Filter

Let us consider the design of a lowpass discrete-time filter by applying impulse invariance to an appropriate Butterworth continuous-time filter.[2] The specifications for the discrete-time filter are

$$0.89125 \le |H(e^{j\omega})| \le 1, \qquad 0 \le |\omega| \le 0.2\pi, \qquad (7.13a)$$

$$|H(e^{j\omega})| \le 0.17783, \qquad 0.3\pi \le |\omega| \le \pi. \qquad (7.13b)$$



Τώρα πρέπει να βρούμε τους πόλους του φίλτρου ....

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}},$$

$$H_c(s)H_c(-s) = \left|H_c(s)\right|^2 = \left|H_c(s)\right|^2_{j\Omega=s}$$

$$H_c(s)H_c(-s) = \frac{1}{1+\left(s/j\Omega_c\right)^{2N}}$$

$$1+\left(s/j\Omega_c\right)^{2N} = 0$$

$$-1 = e^{j(2k-1)\pi}\,\big|\big)^{\frac{1}{2N}}$$

$$s_k = j\Omega_c e^{j\frac{2k-1}{2N}\pi} = \Omega_c e^{j\left(\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{2N}\right)\pi}$$

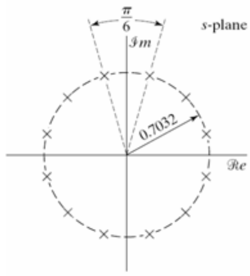
$$\Omega_c = 0.7032.$$

Για να είναι το σύστημα αιτιατό παίρνουμε τους πόλους στο αριστερά μέρος Του πεδίου z

Pole pair 1: $-0.182 \pm j(0.679)$,

Pole pair 2: $-0.497 \pm j(0.497)$,

Pole pair 3: $-0.679 \pm j(0.182)$.



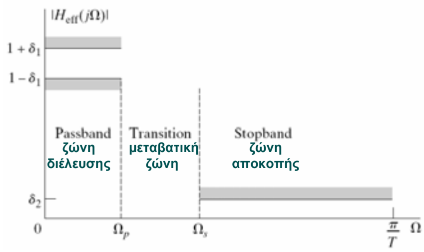
Σχεδιασμός Φίλτρων

Example 7.2 Impulse Invariance with a Butterworth Filter

Let us consider the design of a lowpass discrete-time filter by applying impulse invariance to an appropriate Butterworth continuous-time filter.[2] The specifications for the discrete-time filter are

$$0.89125 \le |H(e^{j\omega})| \le 1, \qquad 0 \le |\omega| \le 0.2\pi, \qquad (7.13a)$$

$$|H(e^{j\omega})| \le 0.17783, \qquad 0.3\pi \le |\omega| \le \pi. \qquad (7.13b)$$



Τώρα πρέπει να βρούμε την εξίσωση του φίλτρου ....

$$H_c(s) = \frac{K_0}{\prod_{k=1}^{N}(s-s_k)}$$

$$\left|H_c(j\Omega)\right|_{\Omega=0} = 1 \quad \text{i.e.} \quad \left|H_c(s)\right|_{s=0} = 1$$

$$\left|H_c(s)\right|_{s=0} = \left|\frac{K_0}{\prod_{k=1}^{N}(-s_k)}\right| = 1 \qquad \left|s_k\right| = \left|\Omega_c e^{j\left(\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{2N}\right)\pi}\right| = \Omega_c$$

$$\frac{K_0}{\Omega_c^N} = 1 \quad \therefore K_0 = \Omega_c^N = (0.7032)^6 = 0.12093$$

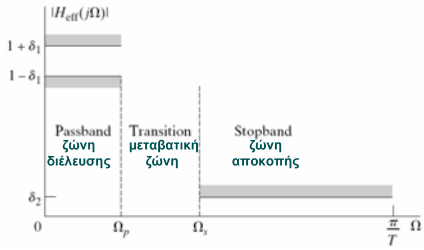
Σχεδιασμός Φίλτρων

Example 7.2 Impulse Invariance with a Butterworth Filter

Let us consider the design of a lowpass discrete-time filter by applying impulse invariance to an appropriate Butterworth continuous-time filter.[2] The specifications for the discrete-time filter are

$$0.89125 \le |H(e^{j\omega})| \le 1, \qquad 0 \le |\omega| \le 0.2\pi, \tag{7.13a}$$

$$|H(e^{j\omega})| \le 0.17783, \qquad 0.3\pi \le |\omega| \le \pi. \tag{7.13b}$$



$$H_c(s) = \frac{K_0}{\prod_{k=1}^{N}(s - s_k)}$$

$$H_c(s) = \frac{0.12093}{(s^2 + 0.3640s + 0.4945)(s^2 + 0.9945s + 0.4945)(s^2 + 1.3585s + 0.4945)}$$

$$z_k = e^{s_k T_d}$$

$$H(z) = \frac{0.2871 - 0.4466z^{-1}}{1 - 1.2971z^{-1} + 0.6949z^{-2}} + \frac{-2.1428 + 1.1455z^{-1}}{1 - 1.0691z^{-1} + 0.3699z^{-2}} + \frac{1.8557 - 0.6303z^{-1}}{1 - 0.9972z^{-1} + 0.2570z^{-2}}.$$

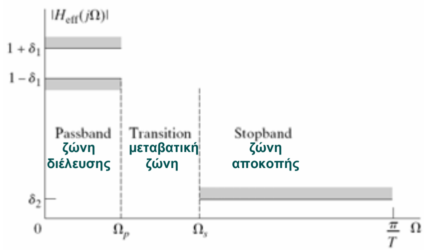
Σχεδιασμός Φίλτρων

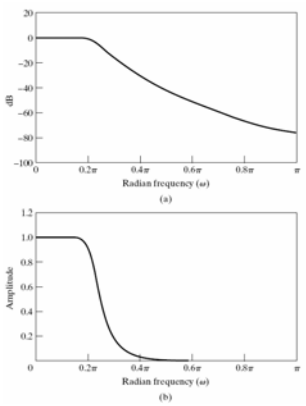
Example 7.2 Impulse Invariance with a Butterworth Filter

Let us consider the design of a lowpass discrete-time filter by applying impulse invariance to an appropriate Butterworth continuous-time filter.[2] The specifications for the discrete-time filter are

$$0.89125 \le |H(e^{j\omega})| \le 1, \qquad 0 \le |\omega| \le 0.2\pi, \tag{7.13a}$$

$$|H(e^{j\omega})| \le 0.17783, \qquad 0.3\pi \le |\omega| \le \pi. \tag{7.13b}$$





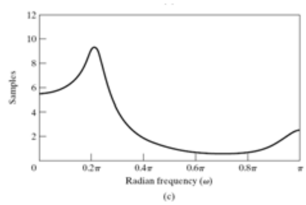


Figure 7.5 Frequency response of sixth-order Butterworth filter transformed by impulse invariance. (a) Log magnitude in dB. (b) Magnitude. (c) Group delay.

Σχεδιασμός Φίλτρων

- **Σχεδιασμός φίλτρων IIR με διγραμμικό μετασχηματισμό (bilinear transformation)**
  - Αποφεύγεται η αναδίπλωση (aliasing)
  - Μετασχηματισμός του άξονας jΩ στο μοναδιαίο κύκλο (unit circle) στο πεδίο z.
  - Μη γραμμική συμπίεση συχνοτήτων

    $-\infty \le \Omega \le \infty \rightarrow \; -\pi \le \omega \le \pi$
  - Μετασχηματισμός

$$s = \frac{2}{T_d}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

$$H(z) = H_c\left[\frac{2}{T_d}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)\right]$$

  - Td για “ιστορικούς” λόγους
  - Δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα

- Σταθερό αιτιατό φίλτρο συνεχούς χρόνου → Σταθερό αιτιατό φίλτρο διακριτού χρόνου

$$z = \frac{1+(T_d/2)s}{1-(T_d/2)s}$$

$$s = \sigma + j\Omega$$

$$z = \frac{1+\sigma T_d/2 + j\Omega T_d/2}{1-\sigma T_d/2 - j\Omega T_d/2}$$

  - σ < 0 → |z| < 1 , για όλες τις Ω
  - σ > 0 → |z| > 1 , για όλες τις Ω

Σχεδιασμός Φίλτρων

- **Σχεδιασμός φίλτρων IIR με διγραμμικό μετασχηματισμό (bilinear transformation)**
  - Μετασχηματισμός του άξονας jΩ στο μοναδιαίο κύκλο (unit circle)

$$z = \frac{1+(T_d/2)s}{1-(T_d/2)s}$$

$$s = j\Omega$$

$$z = \frac{1+j\Omega T_d/2}{1-j\Omega T_d/2}$$

  - =>|z| = 1 , για όλα τα s στον άξονα jΩ

$$e^{j\omega} = \frac{1+j\Omega T_d/2}{1-j\Omega T_d/2}$$

- Μετασχηματισμός συχνοτήτων

$$z = e^{j\omega}.$$

$$s = \frac{2}{T_d}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

$$s = \frac{2}{T_d}\left(\frac{1-e^{-j\omega}}{1+e^{-j\omega}}\right)$$

$$s = \sigma + j\Omega = \frac{2}{T_d}\left[\frac{2e^{-j\omega/2}(j\sin\omega/2)}{2e^{-j\omega/2}(\cos\omega/2)}\right]$$

$$= \frac{2j}{T_d}\tan(\omega/2)$$

$$\boxed{\Omega = \frac{2}{T_d}\tan(\omega/2),}$$

$$\boxed{\omega = 2\arctan(\Omega T_d/2).}$$

  - Χρησιμοποιούμε τους πιο πάνω τύπους για να βρούμε τις συχνότητες διέλευσης και αποκοπής

Σχεδιασμός Φίλτρων

- **Σχεδιασμός φίλτρων IIR με διγραμμικό μετασχηματισμό (bilinear transformation)**

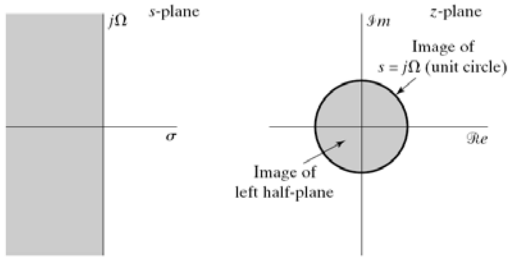


Figure 7.6 Mapping of the s-plane onto the z-plane using the bilinear transformation.

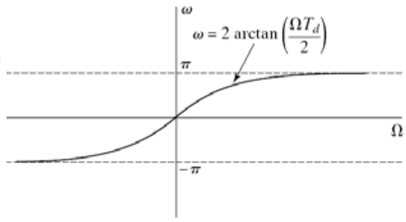


Figure 7.7 Mapping of the continuous-time frequency axis onto the discrete-time frequency axis by bilinear transformation.

Σχεδιασμός Φίλτρων

- **Σχεδιασμός φίλτρων IIR με διγραμμικό μετασχηματισμό (bilinear transformation)**

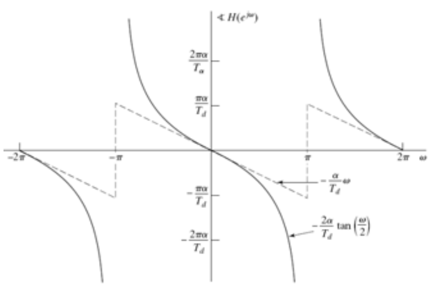


Figure 7.9 Illustration of the effect of the bilinear transformation on a linear phase characteristic. (Dashed line is linear phase and solid line is phase resulting from bilinear transformation.)

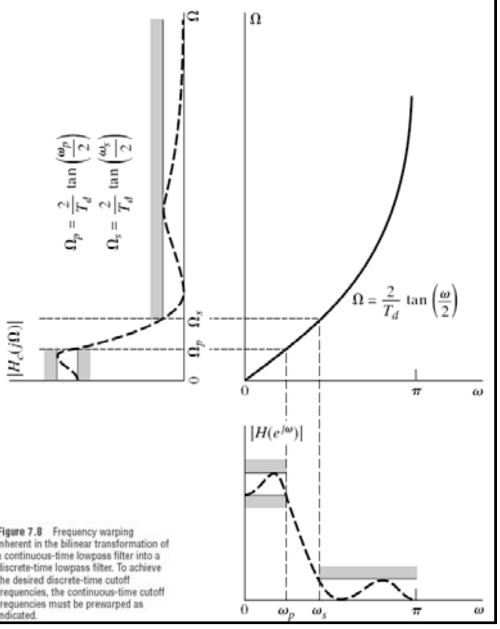


Figure 7.8 Frequency warping inherent in the bilinear transformation of a continuous-time lowpass filter into a discrete-time lowpass filter. To achieve the desired discrete-time cutoff frequencies, the continuous-time cutoff frequencies must be prewarped as indicated.

Example 7.3 Bilinear Transformation of a Butterworth Filter

Consider the discrete-time filter specifications of Example 7.2, in which we illustrated the impulse invariance technique for the design of a discrete-time filter. The specifications on the discrete-time filter are

$$0.89125 \le |H(e^{j\omega})| \le 1, \qquad 0 \le \omega \le 0.2\pi, \qquad (7.30a)$$

$$|H(e^{j\omega})| \le 0.17783, \qquad 0.3\pi \le \omega \le \pi. \qquad (7.30b)$$

Μετασχηματισμός των συχνοτήτων

$$0.89125 \le |H_c(j\Omega)| \le 1, \qquad 0 \le \Omega \le \frac{2}{T_d}\tan\left(\frac{0.2\pi}{2}\right)$$

$$|H_c(j\Omega)| \le 0.17783, \qquad \frac{2}{T_d}\tan\left(\frac{0.3\pi}{2}\right) \le \Omega \le \infty$$

Μια και η Td στο τέλος απαλείφεται μπορούμε να επιλέξουμε Td =1

Το φίλτρο Butterworth είναι

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}},$$

$$|H_c(j2\tan(0.1\pi))| \ge 0.89125$$

$$|H_c(j2\tan(0.15\pi))| \le 0.17783.$$

$$1+\left(\frac{2\tan(0.1\pi)}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.89}\right)^2$$

$$1+\left(\frac{2\tan(0.15\pi)}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.178}\right)^2$$

Λύνουμε για N και Ωc

$$N = \frac{\log\left[\left(\left(\frac{1}{0.178}\right)^2-1\right)\Big/\left(\left(\frac{1}{0.89}\right)^2-1\right)\right]}{2\log[\tan(0.15\pi)/\tan(0.1\pi)]}$$

$$= 5.305.$$

Το N πρέπει να είναι ακέραιος

$$N = 6, \quad \Omega_c = 0.766.$$

Με το N=6 τα χαρακτηριστικά της ζώνης αποκοπής είναι ακριβώς τα αναμενόμενα, ενώ τα υπερβαίνουμε στη ζώνη διέλευσης

Τώρα πρέπει να βρούμε τους πόλους του φίλτρου ….

Example 7.3 Bilinear Transformation of a Butterworth Filter

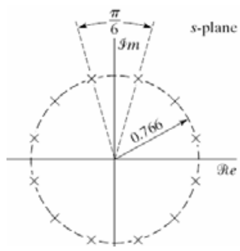
Consider the discrete-time filter specifications of Example 7.2, in which we illustrated the impulse invariance technique for the design of a discrete-time filter. The specifications on the discrete-time filter are

$$0.89125 \le |H(e^{j\omega})| \le 1, \qquad 0 \le \omega \le 0.2\pi, \qquad (7.30a)$$

$$|H(e^{j\omega})| \le 0.17783, \qquad 0.3\pi \le \omega \le \pi. \qquad (7.30b)$$

Τώρα πρέπει να βρούμε τους πόλους του φίλτρου

Όπως και προηγουμένως
12 πόλοι σε συζυγή ζεύγη



Παίρνουμε τους πόλους στο αριστερό μισό του πεδίου

$$H_c(s) = \frac{K_0}{\prod_{k=1}^{N}(s-s_k)} \qquad \frac{K_0}{\Omega_c^N} = 1 \quad \therefore K_0 = \Omega_c^N = 0.20238$$

$$H_c(s) = \frac{0.20238}{(s^2+0.3996s+0.5871)(s^2+1.0836s+0.5871)(s^2+1.4802s+0.5871)}$$

$$H(z) = H_c(s)\Big|_{s=\frac{2}{T_d}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)} = \frac{0.0007378\,(1+z^{-1})^6}{(1-1.2686z^{-1}+0.7051z^{-2})(1-1.0106z^{-1}+0.3583z^{-2})(1-0.9044z^{-1}+0.2155z^{-2})}$$

Σχεδιασμός Φίλτρων

Example 7.3 Bilinear Transformation of a Butterworth Filter

Consider the discrete-time filter specifications of Example 7.2, in which we illustrated the impulse invariance technique for the design of a discrete-time filter. The specifications on the discrete-time filter are

$$0.89125 \le |H(e^{j\omega})| \le 1, \quad 0 \le \omega \le 0.2\pi, \qquad (7.30a)$$

$$|H(e^{j\omega})| \le 0.17783, \quad 0.3\pi \le \omega \le \pi. \qquad (7.30b)$$

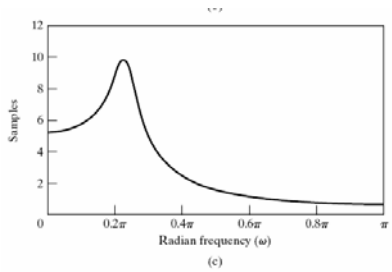
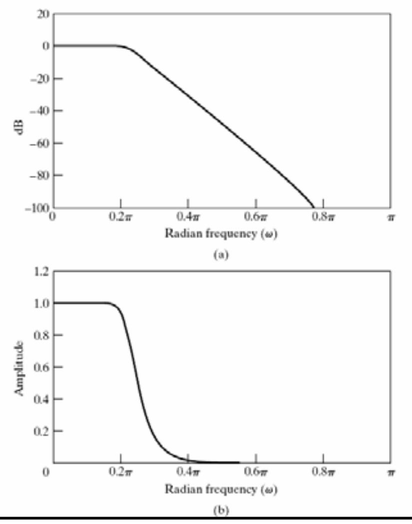


Figure 7.11 Frequency response of sixth-order Butterworth filter transformed by bilinear transform. (a) Log magnitude in dB. (b) Magnitude. (c) Group delay.



Σχεδιασμός Φίλτρων

- **Σχεδιασμός φίλτρων Περιορισμένης Κρουστικής Απόκρισης (Finite Impulse Response – FIR) με χρήση παράθυρου**
  - Φίλτρο με απόκριση συχνότητας $H_d(e^{j\omega})$

    $$h_d[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega.$$

    - Άπειρη κρουστική απόκριση
    - Χρησιμοποιούμε παράθυρο ώστε να την περιορίσουμε χωρίς να ξεφεύγουμε από τα χαρακτηριστικά του φίλτρου

      $$h[n] = h_d[n]w[n],$$

    - Τετραγωνικό (rectangular) παράθυρο

      $$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{M} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega(M+1)}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{-j\omega M/2}\frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)}.$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta.$$

Το φίλτρο αλλοιώνεται λόγω συνέλιξης με τον μετασχηματισμό του παράθυρου

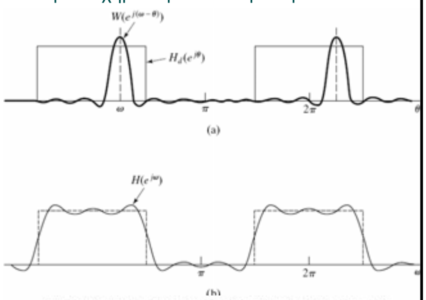


Figure 7.19 (a) Convolution process implied by truncation of the ideal impulse response. (b) Typical approximation resulting from windowing the ideal impulse response.

Σχεδιασμός Φίλτρων

- **Σχεδιασμός φίλτρων FIR με χρήση παράθυρου**
  - Κοινά παράθυρα

Rectangular

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Bartlett (triangular)

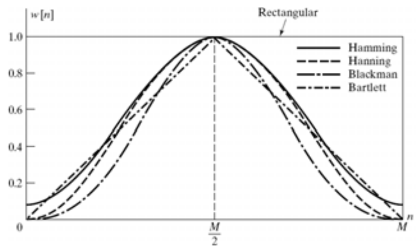
$$w[n] = \begin{cases} 2n/M, & 0 \le n \le M/2, \\ 2 - 2n/M, & M/2 < n \le M, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Hanning

$$w[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5\cos(2\pi n/M), & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Hamming

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46\cos(2\pi n/M), & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

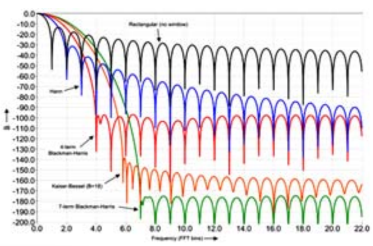


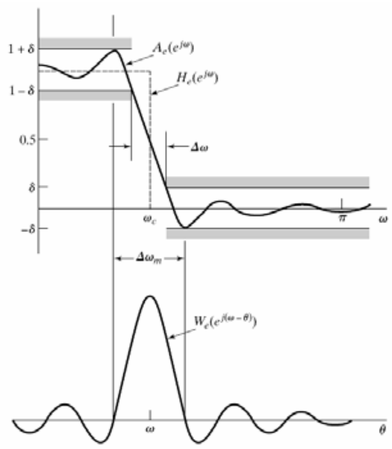
Σχεδιασμός Φίλτρων

- **Σχεδιασμός φίλτρων FIR με χρήση παράθυρου**
  - Κοινά παράθυρα

TABLE 7.1 COMPARISON OF COMMONLY USED WINDOWS

Type of Window	Peak Side-Lobe Amplitude (Relative)	$\Delta\omega_m$	$20\log_{10}\delta$ (dB)	$\Delta\omega$
Rectangular	−13	$4\pi/(M+1)$	−21	$1.81\pi/M$
Bartlett	−25	$8\pi/M$	−25	$2.37\pi/M$
Hanning	−31	$8\pi/M$	−44	$5.01\pi/M$
Hamming	−41	$8\pi/M$	−53	$6.27\pi/M$
Blackman	−57	$12\pi/M$	−74	$9.19\pi/M$





Σχεδιασμός Φίλτρων

- **Σχεδιασμός φίλτρων FIR με χρήση παράθυρου**
  - Γραμμική Φάση
    - Αν τόσο η απόκριση όσο και το παράθυρο είναι συμμετρικά ή αντι-συμμετρικά θα έχουμε γραμμική φάση

$$w[n] = \begin{cases} w[M-n], & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{otherwise;} \end{cases} \quad W(e^{j\omega}) = W_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2},$$

Συμμετρικό h

$$h_d[M-n] = h_d[n],$$

$$H_d(e^{j\omega}) = H_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2},$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_e(e^{j\theta})e^{-j\theta M/2} W_e(e^{j(\omega-\theta)})e^{-j(\omega-\theta)M/2} d\theta.$$

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2},}$$

$$A_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_e(e^{j\theta})W_e(e^{j(\omega-\theta)})d\theta.$$

Αντι-συμμετρικό h

$$h_d[M-n] = -h_d[n],$$

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = jA_o(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2},}$$

Σχεδιασμός Φίλτρων

Example 7.7 Linear-Phase Lowpass Filter

The desired frequency response is defined as

$$H_{\text{lp}}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega M/2}, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \le \pi, \end{cases} \tag{7.56}$$

where the generalized linear phase factor has been incorporated into the definition of the ideal lowpass filter. The corresponding ideal impulse response is

$$h_{\text{lp}}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega M/2}e^{j\omega n}d\omega = \frac{\sin[\omega_c(n-M/2)]}{\pi(n-M/2)} \tag{7.57}$$

for $-\infty < n < \infty$. It is easily shown that $h_{\text{lp}}[M-n] = h_{\text{lp}}[n]$, so if we use a symmetric window in the equation

$$h[n] = \frac{\sin[\omega_c(n-M/2)]}{\pi(n-M/2)}w[n], \tag{7.58}$$

then a linear-phase system will result.

Σχεδιασμός Φίλτρων

- **Σχεδιασμός φίλτρων FIR με χρήση παράθυρου Kaiser**
  - Απλουστεύει τον σχεδιασμό
  - Δεν χρειάζονται πολλές προσπάθειες (trial and error)

$\omega_p\,,\omega_s,\,\delta_1=\delta_2=\delta$

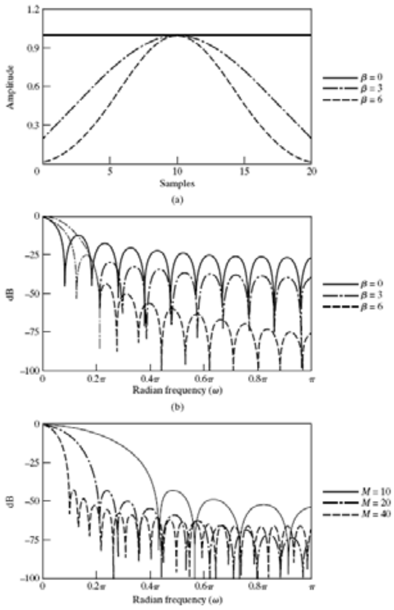
$$w_k[n]=\begin{cases}\dfrac{I_0[\beta(1-(\frac{n-\alpha}{\alpha})^2)^{1/2}]}{I_0(\beta)} & ,\quad 0\le n\le M\,,\alpha=\dfrac{M}{2}\\ 0 & ,\quad \text{otherwise}\end{cases}$$

$$\text{A}=-20\log_{10}\delta \quad \text{(attenuation)}$$

$$\beta=\begin{cases}0.1102(A-8.7) & ,A>50\\ 0.5842(A-21)^{0.4}+0.07886(A-21) & ,21\le A\le 50\\ 0.0 & ,A<21\end{cases}$$

$$\Delta\omega=\omega_s\text{ - }\omega_p \qquad M=\frac{A\text{ - }8}{2.285\Delta\omega} \qquad \alpha=\frac{\text{M}}{2}$$

- Παρόμοιο με το Hamming για β≈5

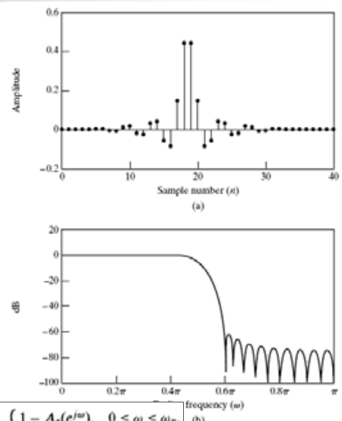


Σχεδιασμός Φίλτρων

Example 7.8 Kaiser Window Design of a Lowpass Filter

With the use of the design formulas for the Kaiser window, it is straightforward to design an FIR lowpass filter to meet prescribed specifications. The procedure is as follows:

1. First the specifications must be established. This means selecting the desired ω_p and ω_s and the maximum tolerable approximation error. For window design, the resulting filter will have the same peak error δ in both the passband and the stopband. For this example, we use the same specifications as in Examples 7.4, 7.5, and 7.6, i.e., $\omega_p=0.4\pi$, $\omega_s=0.6\pi$, $\delta_1=0.01$, and $\delta_2=0.001$. Since filters designed by the window method inherently have $\delta_1=\delta_2$, we must set $\delta=0.001$.
2. The cutoff frequency of the underlying ideal lowpass filter must be found. Due to the symmetry of the approximation at the discontinuity of $H_d(e^{j\omega})$, we would set
$$\omega_c=\frac{\omega_p+\omega_s}{2}=0.5\pi.$$
3. To determine the parameters of the Kaiser window, we first compute
$$\Delta\omega=\omega_s-\omega_p=0.2\pi, \qquad A=-20\log_{10}\delta=60.$$
We substitute these two quantities into Eqs. (7.62) and (7.63) to obtain the required values of β and M. For this example the formulas predict
$$\beta=5.653, \qquad M=37.$$
4. The impulse response of the filter is computed using Eqs. (7.58) and (7.59). We obtain
$$h[n]=\begin{cases}\dfrac{\sin\omega_c(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)}\cdot\dfrac{I_0[\beta(1-[(n-\alpha)/\alpha]^2)^{1/2}]}{I_0(\beta)}, & 0\le n\le M,\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}$$
where $\alpha=M/2=37/2=18.5$. Since $M=37$ is an odd integer, the resulting linear-phase system would be of type II. (See Section 5.7.3 for the definitions of the four types of FIR systems with generalized linear phase.) The response



$$E_A(\omega)=\begin{cases}1-A_e(e^{j\omega}), & 0\le\omega\le\omega_p,\\ 0-A_e(e^{j\omega}), & \omega_s\le\omega\le\pi.\end{cases}$$