



Διάλεξη 2

Συστήματα Εξισώσεων Διαφορών Διακριτά Σήματα στο Χώρο της Συχνότητας



Συστήματα Εξισώσεων Διαφορών



• Γραμμικές Εξισώσεις Διαφορών με Σταθερούς Συντελεστές (Linear Constant- Coefficient Difference Equations)

- Ένας 2^{ος} τρόπος αναπαράστασης ΓΧΑ συστημάτων (αντί της συνέλιξης με την κρουστική απόκριση)
- Χρήσιμος στην υλοποίηση των συστημάτων
- Ανάλογος των διαφορικών εξισώσεων στα συστήματα συνεχούς χρόνου

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^M b_m x[n-m]$$

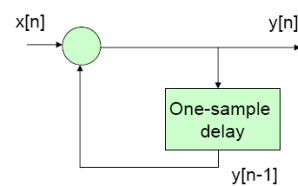
Accumulator

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

$$y[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]$$

$$y[n] = x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] = x[n] + y[n-1]$$

$$y[n] - y[n-1] = x[n]$$





Συστήματα Εξισώσεων Διαφορών



• Η λύση δεν είναι μοναδική

- Ομογενής λύση (homogeneous solution) + βεβιασμένη απόκριση (forced response)
- Μοναδική μόνο με κάποιες βοηθητικές συνθήκες (auxiliary conditions)
 - Χρειάζονται N βοηθητικές συνθήκες
 - Αυτές οι συνθήκες καθορίζουν κατά πόσο ένα σύστημα είναι ΓΧΑ και αιτιατό
 - Αν το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ανάπαυσης αρχικά (initial rest) τότε θα είναι όλα τα πιο πάνω

$$y[n] = y_p[n] + y_h[n]$$

$$\sum_{k=0}^N a_k y_h[n-k] = 0$$

3

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Συστήματα Εξισώσεων Διαφορών



• Η λύση δεν είναι μοναδική

- Αν είναι γνωστές μια σειρά από τιμές εξόδου μπορούμε να καθορίσουμε τη λύση με αναδρομικές (recursive) εξισώσεις
- Παράδειγμα

$$y[n] = ay[n-1] + x[n]$$

$$x[n] = K\delta[n], y[-1] = c$$
- Είναι ΓΧΑ και αιτιατό;
 - Δεν είναι Γ
 - Δεν ισχύει η αναλογικότητα για $x[n]=0$
 - Δεν είναι ΧΑ
 - $x_1[n] = K\delta[n-n_0]$
 - $y_1[n] \neq y[n]$
 - Δεν είναι αιτιατό
 - $y[n-1] = a^{-1}[y[n] - x[n]]$

$$y[0] = ac + K$$

$$y[1] = ay[0] + 0 = a(ac + K) = a^2c + aK$$

$$y[2] = ay[1] + 0 = a(a^2c + aK) = a^3c + a^2K$$

$$y[3] = ay[2] + 0 = a(a^3c + a^2K) = a^4c + a^3K$$

...

$$y[n] = a^{n+1}c + a^nK \quad \text{for } n \geq 0$$

$$y[n-1] = \frac{1}{a}[y[n] - x[n]]$$

$$y[-2] = a^{-1}(y[-1] - x[-1]) = a^{-1}(c + 0) = a^{-1}c$$

$$y[-3] = a^{-1}(y[-2] - x[-2]) = a^{-1}(a^{-1}c + 0) = a^{-2}c$$

$$y[-4] = a^{-1}(y[-3] - x[-3]) = a^{-1}(a^{-2}c + 0) = a^{-3}c$$

...

$$y[n] = a^{n+1}c \quad \text{for } n \leq -1$$

$$y[n] = a^{n+1}c + Ka^n u[n] \quad \text{for all } n$$

4

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Διακριτά Σήματα στο Χώρο της Συχνότητας



• Σε ΓΧΑ συστήματα

- Μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις είναι ιδιοσυναρτήσεις του συστήματος
- Είσοδος ημιτονοειδής → έξοδος ημιτονοειδής με ίδια συχνότητα (πλάτος και φάση καθορίζονται από το σύστημα)
- Χρήσιμος ο μετασχηματισμός Fourier

$$x[n] = e^{j\omega n}, \quad -\infty < n < \infty$$

$$y[n] = T\{e^{j\omega n}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega(n-k)}$$

$$= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}$$

$$y[n] = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$$

Eigenvalue

Eigenfunction

• Οι ιδιοτιμές $H(e^{j\omega})$ ονομάζονται απόκριση συχνότητας (frequency response)

- Είναι συνήθως μιγαδική

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega})$$

$$= |H(e^{j\omega})| e^{j\angle H(e^{j\omega})}$$

5

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Διακριτά Σήματα στο Χώρο της Συχνότητας



• Παράδειγμα

- Απόκριση συχνότητας του ιδανικού συστήματος καθυστέρησης (ideal delay system)

$$y[n] = x[n - n_d] \rightarrow h[n] = \delta[n - n_d]$$

• Μέθοδος 1

$$x[n] = e^{j\omega n}$$

$$y[n] = T\{e^{j\omega n}\} = e^{j\omega(n-n_d)} = e^{-j\omega n_d} e^{j\omega n}$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}$$

$$H_R(e^{j\omega}) = \cos(\omega n_d),$$

$$H_I(e^{j\omega}) = -\sin(\omega n_d),$$

$$|H(e^{j\omega})| = 1,$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\omega n_d.$$

• Μέθοδος 2

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k - n_d] e^{-j\omega k} = e^{-j\omega n_d}$$

6

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Διακριτά Σήματα στο Χώρο της Συχνότητας



• Η απόκριση συχνότητας ΓΧΑ συστημάτων διακριτού χρόνου

- Είναι πάντα περιοδική με συχνότητα ω και περίοδο 2π
 - Καθορίζεται μόνο μεταξύ $-\pi < \omega \leq \pi$
 - Οι “ψηλές συχνότητες” βρίσκονται γύρω από το 0
 - Οι “χαμηλές συχνότητες” γύρω από το $\pm\pi$
- Έξοδος ημιτονοειδής με ίδια συχνότητα (πλάτος και φάση καθορίζονται από το σύστημα)

$$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j(\omega+2\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}e^{-j2\pi n} = H(e^{j\omega})$$

$$\begin{aligned} x[n] &= A \cos(\omega_0 n + \phi) \\ &= \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n} \\ y[n] &= \frac{A}{2} e^{j\phi} H(e^{j\omega_0}) e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} H(e^{-j\omega_0}) e^{-j\omega_0 n} \\ &= A |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \phi + \theta) \end{aligned}$$

if $x[n]$ is real

$$H(e^{-j\omega_0}) = H^*(e^{j\omega_0}) \Rightarrow H(e^{j\omega_0})|e^{-\angle H(e^{j\omega_0})} \Rightarrow H(e^{j\omega_0})|e^{-\theta}$$

7

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Διακριτά Σήματα στο Χώρο της Συχνότητας



• Ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων (ideal frequency selective filters)

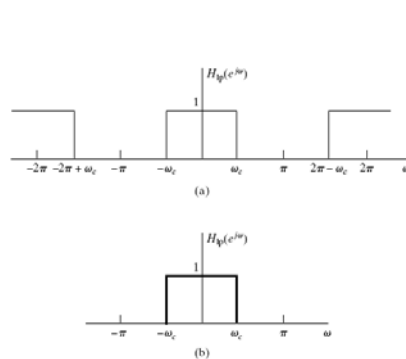


Figure 2.17 Ideal lowpass filter showing (a) periodicity of the frequency response and (b) one period of the periodic frequency response.

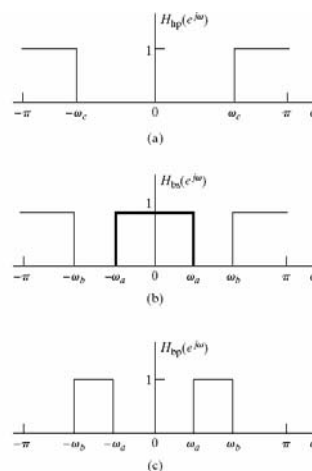


Figure 2.18 Ideal frequency-selective filters. (a) Highpass filter. (b) Bandstop filter. (c) Bandpass filter. In each case, the frequency response is periodic with period 2π . Only one period is shown.

8

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Διακριτά Σήματα στο Χώρο της Συχνότητας



• Απόκριση Συχνότητας (Frequency response)

- Πολλά σήματα μπορούν να καθοριστούν ως ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών
- Αν αυτό ισχύει, το σήμα εξόδου $y[n]$ καθορίζεται από την απόκριση συχνότητας

$$x[n] = \sum_k \alpha_k e^{j\omega_k n}$$

$$y[n] = \sum_k \alpha_k H(e^{j\omega_k}) e^{j\omega_k n}$$

• Μετασχηματισμός Fourier

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

← Ο μετασχηματισμός Fourier είναι συνήθως μιγαδικός (πλάτος & φάση)

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

$$= |X(e^{j\omega})| e^{j\angle X(e^{j\omega})}$$

• Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

← Το $x[n]$ αποτελείται από πολλά μικροσκοπικά μιγαδικά ημιτονοειδή

$$\frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

- $\omega \rightarrow$ συνεχής μεταβλητή
- $n \rightarrow$ διακριτή μεταβλητή

9

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Διακριτά Σήματα στο Χώρο της Συχνότητας



• Μετασχηματισμός Fourier

- Είναι συνήθως μιγαδικός (πλάτος & φάση)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

$$= |X(e^{j\omega})| e^{j\angle X(e^{j\omega})}$$

- Είναι περιοδικός με περίοδο 2π

- Αν το $x[n]$ αθροίζεται (absolutely summable) τότε ο μετασχηματισμός Fourier καθορίζεται και υπάρχει (exists)

$$\begin{aligned} |X(e^{j\omega})| &= \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \right| \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| |e^{-j\omega n}| \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \end{aligned}$$

10

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Διακριτά Σήματα στο Χώρο της Συχνότητας



- Ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο (ideal low pass filter)

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$h_{lp}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$$

$$-\infty < n < \infty$$

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} e^{-j\omega n}$$

- Μη-αιτιατό
- Δεν αθροίζεται

- Το πεπερασμένο (finite) άθροισμα είναι σημαντικό στο σχεδιασμό φίλτρων διακριτού χρόνου

$$H_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} e^{-j\omega n}$$

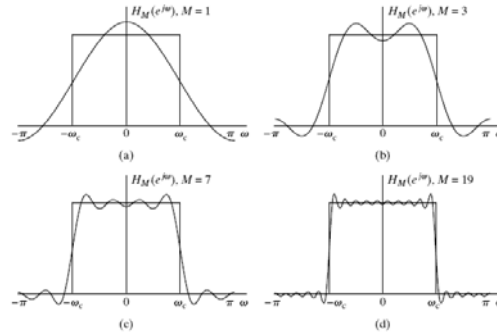


Figure 2.21 Convergence of the Fourier transform. The oscillatory behavior at $\omega = \omega_c$ is often called the Gibbs phenomenon.



Διακριτά Σήματα στο Χώρο της Συχνότητας



- Μετασχηματισμός Fourier σταθεράς

Constant sequence

$$x[n] = 1$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$\text{where } X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

Its Fourier transform is defined as the periodic impulse train

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega + 2\pi r)$$



Διακριτά Σήματα στο Χώρο της Συχνότητας



• Συμμετρικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

- Συζυγής Συμμετρική Σειρά (conjugate-symmetric sequence)

$$x_e[n] = x_e^*[-n]$$

- Συζυγής Αντι-συμμετρική Σειρά (conjugate-antisymmetric sequence)

$$x_o[n] = -x_o^*[-n]$$

$$\text{Any } x[n], \quad x[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n]) + \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n])$$

$$\text{define } x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n]) = x_e^*[-n]$$

$$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n]) = -x_o^*[-n]$$

$$\therefore x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$$

where

$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}([X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})]) = X_e^*(e^{-j\omega})$$

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})) = -X_o^*(e^{-j\omega})$$



Διακριτά Σήματα στο Χώρο της Συχνότητας



• Συμμετρικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

TABLE 2.1 SYMMETRY PROPERTIES OF THE FOURIER TRANSFORM

Sequence $x[n]$	Fourier Transform $X(e^{j\omega})$
1. $x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
2. $x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
3. $\Re\{x[n]\}$	$X_e(e^{j\omega})$ (conjugate-symmetric part of $X(e^{j\omega})$)
4. $j\Im\{x[n]\}$	$X_o(e^{j\omega})$ (conjugate-antisymmetric part of $X(e^{j\omega})$)
5. $x_e[n]$ (conjugate-symmetric part of $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega}) = \Re\{X(e^{j\omega})\}$
6. $x_o[n]$ (conjugate-antisymmetric part of $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega}) = j\Im\{X(e^{j\omega})\}$
<i>The following properties apply only when $x[n]$ is real:</i>	
7. Any real $x[n]$	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ (Fourier transform is conjugate symmetric)
8. Any real $x[n]$	$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ (real part is even)
9. Any real $x[n]$	$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ (imaginary part is odd)
10. Any real $x[n]$	$ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) $ (magnitude is even)
11. Any real $x[n]$	$\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$ (phase is odd)
12. $x_e[n]$ (even part of $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega})$
13. $x_o[n]$ (odd part of $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega})$



Διακριτά Σήματα στο Χώρο της Συχνότητας



• Γραμμικότητα μετασχηματισμού Fourier

$$x_1[n] \xleftrightarrow{F} X_1(e^{j\omega})$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{F} X_2(e^{j\omega})$$

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{F} aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

• Μετατόπιση στο χρόνο και στη συχνότητα

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$x[n - n_d] \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$$

$$e^{-j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

• Αντιστροφή στο χρόνο

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$x[-n] \xleftrightarrow{F} X(e^{-j\omega})$$

$$x[-n] \xleftrightarrow{F} X^*(e^{j\omega})$$

• Παράγωγος Συχνότητας

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$nx[n] \xleftrightarrow{F} j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

15

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Διακριτά Σήματα στο Χώρο της Συχνότητας



• Θεώρημα του Parseval

- Ε=ενέργεια

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

• Θεώρημα Συνέλιξης

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$h[n] \xleftrightarrow{F} H(e^{j\omega})$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

• Θεώρημα διαμόρφωσης (modulation) ή παράθυρου (windowing)

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$w[n] \xleftrightarrow{F} W(e^{j\omega})$$

$$y[n] = x[n]w[n]$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

16

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Διακριτά Σήματα στο Χώρο της Συχνότητας



• Μετασχηματισμοί κάποιων συναρτήσεων

TABLE 2.3 FOURIER TRANSFORM PAIRS

Sequence	Fourier Transform
1. $\delta[n]$	1
2. $\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
3. 1 $(-\infty < n < \infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega + 2\pi k)$
4. $a^n u[n]$ $(a < 1)$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
5. $u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega + 2\pi k)$
6. $(n+1)a^n u[n]$ $(a < 1)$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$
7. $\frac{r^n \sin \omega_p (n+1)}{\sin \omega_p} u[n]$ $(r < 1)$	$\frac{1}{1 - 2r \cos \omega_p e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
8. $\frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c \\ 0, & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$
9. $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
10. $e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
11. $\cos(\omega_0 n + \phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \pi e^{-j\phi} \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$



Διακριτά Σήματα στο Χώρο της Συχνότητας



• Παράδειγμα $x[n] = a^n u[n-5]$

TABLE 2.2 FOURIER TRANSFORM THEOREMS

Sequence	Fourier Transform
$x[n]$ $y[n]$	$X(e^{j\omega})$ $Y(e^{j\omega})$
1. $ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
2. $x[n - n_0]$ $(n_0 \text{ an integer})$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
3. $e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
4. $x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$ $X^*(e^{j\omega})$ if $x[n]$ real.
5. $nx[n]$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
6. $x[n]y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
7. $x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega - \theta)})d\theta$
Parseval's theorem:	
8. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$	
9. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$	

TABLE 2.3 FOURIER TRANSFORM PAIRS

Sequence	Fourier Transform
1. $\delta[n]$	1
2. $\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
3. 1 $(-\infty < n < \infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega + 2\pi k)$
4. $a^n u[n]$ $(a < 1)$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
5. $u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega + 2\pi k)$
6. $(n+1)a^n u[n]$ $(a < 1)$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$
7. $\frac{r^n \sin \omega_p (n+1)}{\sin \omega_p} u[n]$ $(r < 1)$	$\frac{1}{1 - 2r \cos \omega_p e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
8. $\frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c \\ 0, & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$
9. $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
10. $e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
11. $\cos(\omega_0 n + \phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \pi e^{-j\phi} \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$



Διακριτά Σήματα στο Χώρο της Συχνότητας



• Παράδειγμα $x[n] = a^n u[n-5]$

$$x_1[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{F} X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$x_2[n] = x_1[n-5] \quad (\text{i.e.} = a^{n-5} u[n-5])$$

$$X_2(e^{j\omega}) = e^{-j5\omega} X_1(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j5\omega}}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$x[n] = a^5 x_2[n] \quad (\text{i.e.} = a^n u[n-5])$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{a^5 e^{-j5\omega}}{1 - ae^{-j\omega}}$$