



Διάλεξη 3

Δειγματοληψία και Ανακατασκευή Σημάτων

(Κεφ. 4.0-4.3 & 4.6,4.8)



Δειγματοληψία και Ανακατασκευή Σημάτων



• Περιοδική δειγματοληψία (periodic sampling)

- Περίοδος δειγματοληψίας (sampling period)
 - T
- Συχνότητα δειγματοληψίας (sampling frequency)
 - $f_s = 1/T$
 - $\Omega_s = 2\pi/T$

$$x[n] = x_c(nT), \quad -\infty < n < \infty$$

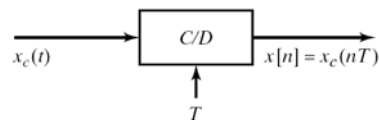


Figure 4.1 Block diagram representation of an ideal continuous-to-discrete-time (C/D) converter.

• Η δειγματοληψία δεν είναι αναστρέψιμη

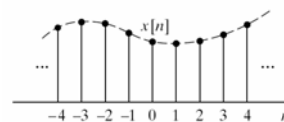
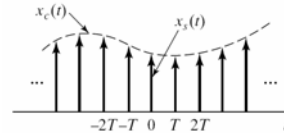
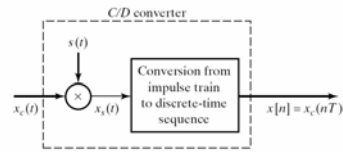
- Υπό ορισμένες συνθήκες μπορούμε να ανακτήσουμε το σήμα



Δειγματοληψία και Ανακατασκευή Σημάτων



- **Μαθηματική αναπαράσταση**
 - Ψηφιοποίηση σε δύο στάδια
 1. Διαμόρφωση με σειρά από κρουστικές συναρτήσεις (impulse train modulation)
 2. Μετατροπή σε διακριτή σειρά (sequence)
 - Δεν έχει σχέση με την πραγματική διαδικασία ή κύκλωμα δειγματοληψίας
 - Χρήσιμη στη κατανόηση των εννοιών



$$\begin{aligned}
 s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \\
 x_s(t) &= x_c(t)s(t) \\
 &= x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \delta(t - nT) \\
 x[n] &= x_c(nT), \quad -\infty < n < \infty
 \end{aligned}$$

3

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Δειγματοληψία και Ανακατασκευή Σημάτων



- **Δειγματοληψία στο χώρο της συχνότητας**
 - Φάσμα X_s (συνεχές σήμα)

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) & \leftrightarrow & S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) \\
 x_s(t) &= x_c(t)s(t) & \leftrightarrow & X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * S(j\Omega) \\
 &= x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) & & = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s)) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \delta(t - nT) & &
 \end{aligned}$$

- Ο $F\{\}$ του $x_s(t)$ είναι μια περιοδική επανάληψη του $F\{\}$ του $x_c(t)$

4

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Δειγματοληψία και Ανακατασκευή Σημάτων



$$S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s)$$

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s))$$

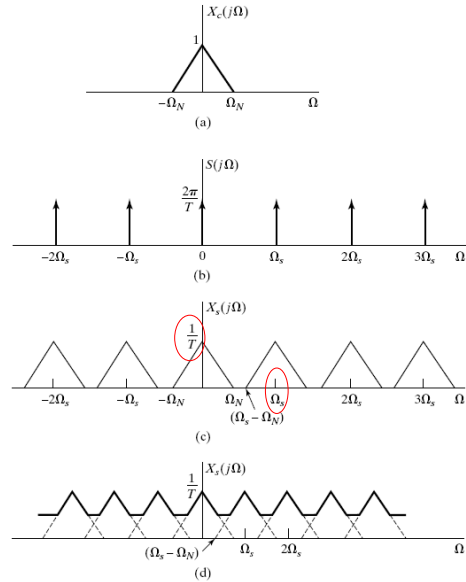


Figure 4.3 Effect in the frequency domain of sampling in the time domain.
(a) Spectrum of the original signal.
(b) Spectrum of the sampling function.
(c) Spectrum of the sampled signal with $\Omega_s > 2\Omega_N$. (d) Spectrum of the sampled signal with $\Omega_s < 2\Omega_N$.

5

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Δειγματοληψία και Ανακατασκευή Σημάτων



• Ανάκτηση του φάσματος

- Ιδανικό βαθυπερατό (low-pass) φίλτρο

- Απολαβή (gain) T

- Συχνότητα αποκοπής (cutoff frequency) Ω_c

$$\Omega_N < \Omega_c < (\Omega_s - \Omega_N)$$

$$X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)X_s(j\Omega)$$

$$X_r(j\Omega) = X_c(j\Omega)$$

για

$$\Omega_s - \Omega_N > \Omega_N \text{ or } \Omega_s > 2\Omega_N$$

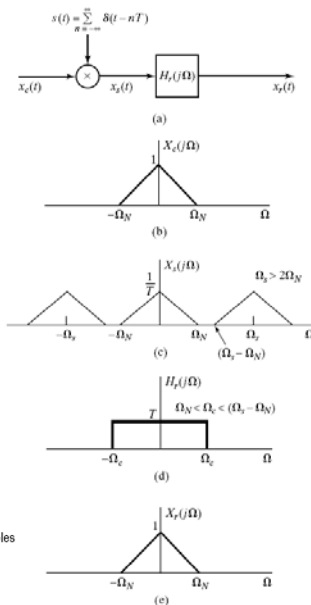


Figure 4.4 Exact recovery of a continuous-time signal from its samples using an ideal lowpass filter.

6

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



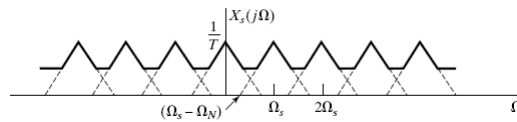
Δειγματοληψία και Ανακατασκευή Σημάτων



• Παραμόρφωση (distortion) του σήματος

- Αλλοίωση ή αναδίπλωση (aliasing)

$$\Omega_s \leq 2\Omega_N$$



- Δεν μπορούμε να διαχωρίσουμε το φάσμα

7

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Δειγματοληψία και Ανακατασκευή Σημάτων

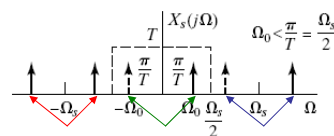
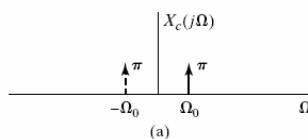


• Αλλοίωση ή αναδίπλωση (aliasing)

- Παράδειγμα

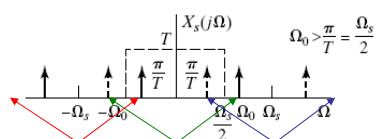
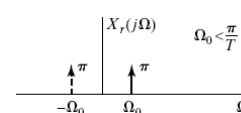
$$x_c(t) = \cos \Omega_0 t$$

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s))$$



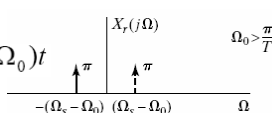
Χωρίς αναδίπλωση

$$x_r(t) = \cos \Omega_0 t$$



Με αναδίπλωση

$$x_r(t) = \cos(\Omega_s - \Omega_0)t$$



8

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Δειγματοληψία και Ανακατασκευή Σημάτων



• Θεώρημα δειγματοληψίας του Nyquist (Nyquist Sampling Theorem)

- Ένα σήμα $x_c(t)$ με περιορισμένο φάσμα (bandlimited)

$$X_c(j\Omega) = 0, \quad \text{for } |\Omega| \geq \Omega_N$$

- Μπορεί να καθοριστεί μοναδικά (uniquely) από τα δείγματα του

$$x[n] = x_c(nT), \quad -\infty < n < \infty$$

- Αν

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} \geq 2\Omega_N$$

- Συχνότητα Nyquist: Ω_N
- Ρυθμός (rate) Nyquist: $2\Omega_N$

9

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Δειγματοληψία και Ανακατασκευή Σημάτων



• Μετασχηματισμός Fourier του $x[n]$

- $F\{x_s(t)\}$ συνεχούς χρόνου

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$X_s(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) e^{-j\Omega nT}$$

- $F\{x[n]\}$ διακριτού χρόνου

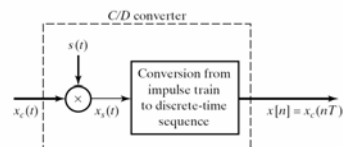
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

- άρα

$$X_s(j\Omega) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} = X(e^{j\Omega T})$$

- μια και

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s))$$



$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \delta(t - nT)$$

$$x[n] = x_c(nT), \quad -\infty < n < \infty$$

10

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Δειγματοληψία και Ανακατασκευή Σημάτων



• Μετασχηματισμός Fourier του $x[n]$

$$X_s(j\Omega) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} = X(e^{j\Omega T})$$

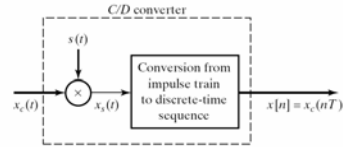
- μια και

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s))$$

- έχουμε

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T})) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j\frac{\omega - 2\pi k}{T})$$

- Ανηγγμένη (scaled) κλίμακα συχνότητας, $\omega = \Omega T$
 - Η συχνότητα $\Omega = \Omega_s$ γίνεται $\omega = 2\pi$
- Το σήμα $x_s(t)$ είναι συνεχούς χρόνου και άρα συνεχίζει να έχει περίοδο T μεταξύ των δειγμάτων. Ο "χρόνος" μεταξύ των δειγμάτων του $x[n]$ είναι πάντα 1



$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \delta(t - nT)$$

$$x[n] = x_c(nT), \quad -\infty < n < \infty$$



Δειγματοληψία και Ανακατασκευή Σημάτων



• Ανακατασκευή σημάτων

• Δυνατή όταν

Πριν

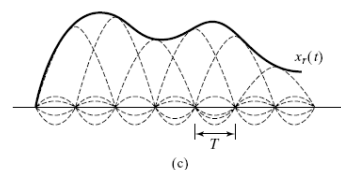
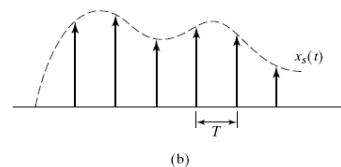
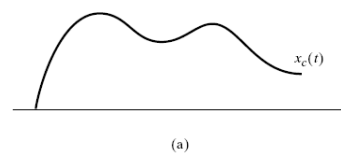
- Σήμα με περιορισμένο φάσμα
- Αρκετά ψηλή συχνότητα δειγματοληψίας

Μετά

- Γνωστή περίοδος δειγματοληψίας

• Μέθοδος

1. Μετατροπή σε σειρά από κρουστικές συναρτήσεις (impulse train)
2. Παρεμβολή (interpolation) για μετατροπή σε συνεχή χρόνο → βαθυπερατό φίλτρο συνεχούς χρόνου





Δειγματοληψία και Ανακατασκευή Σημάτων



- Ανακατασκευή σημάτων

- Μέθοδος

1. Μετατροπή σε σειρά από κρουστικές συναρτήσεις (impulse train)

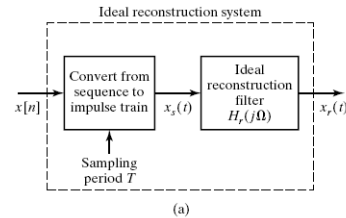
$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t-nT)$$

2. Παρεμβολή (interpolation) για μετατροπή σε συνεχή χρόνο → βαθυπερατό φίλτρο συνεχούς χρόνου

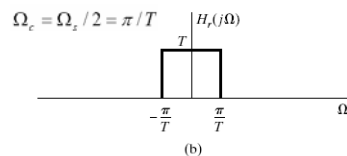
$$h_r(t) \leftrightarrow H_r(j\Omega)$$

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h_r(t-nT)$$

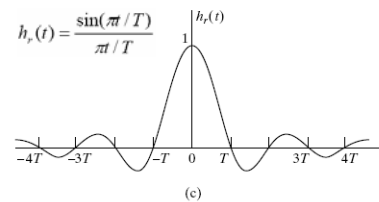
$$X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)X(e^{j\Omega T})$$



(a)



(b)



(c)

13

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Δειγματοληψία και Ανακατασκευή Σημάτων



- Ανακατασκευή σημάτων

- Μέθοδος

1. Μετατροπή σε σειρά από κρουστικές συναρτήσεις (impulse train)

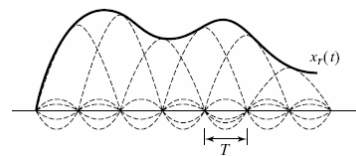
$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t-nT)$$

2. Παρεμβολή (interpolation) για μετατροπή σε συνεχή χρόνο → βαθυπερατό φίλτρο συνεχούς χρόνου

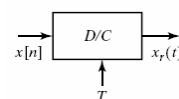
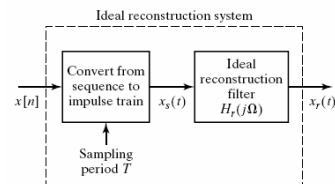
$$h_r(t) \leftrightarrow H_r(j\Omega)$$

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h_r(t-nT)$$

$$X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)X(e^{j\Omega T})$$



$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin(\pi(t-nT)/T)}{\pi(t-nT)/T}$$



14

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Δειγματοληψία και Ανακατασκευή Σημάτων



• Εφαρμογές

Figure 4.11 Discrete-time processing of continuous-time signals.

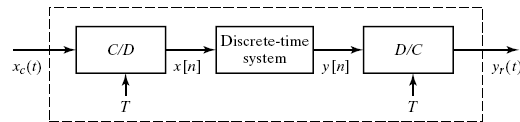
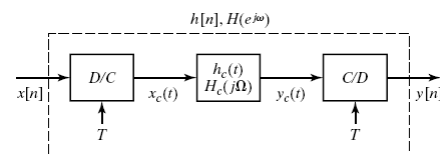


Figure 4.16 Continuous-time processing of discrete-time signals.



Δειγματοληψία και Ανακατασκευή Σημάτων



• Αλλαγή της συχνότητας δειγματοληψίας

- Μείωση της f_s (downsampling)

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}))$$

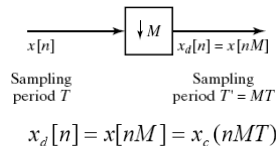
$$\begin{aligned} X_d(e^{j\omega}) &= \frac{1}{T'} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c(j(\frac{\omega}{T'} - \frac{2\pi r}{T'})) \\ &= \frac{1}{MT} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c(j(\frac{\omega}{MT} - \frac{2\pi r}{MT})) \end{aligned}$$

$$r = i + kM, \quad -\infty < k < \infty, \quad 0 \leq i \leq M-1, \quad -\infty < r < \infty$$

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} [\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\frac{\omega}{MT} - \frac{2\pi k}{T} - \frac{2\pi i}{MT}))]$$

$$\text{Γνωρίζουμε ότι } X(e^{j(\omega - 2\pi i)/M}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\frac{\omega}{MT} - \frac{2\pi k}{MT} - \frac{2\pi i}{T}))$$

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} X(e^{j(\omega - 2\pi i)/M})$$



$$x_d[n] = x[nM] = x_c(nMT)$$

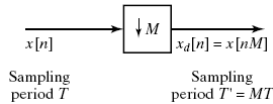


Δειγματοληψία και Ανακατασκευή Σημάτων



• Αλλαγή της συχνότητας δειγματοληψίας

- Μείωση της f_s (downsampling)



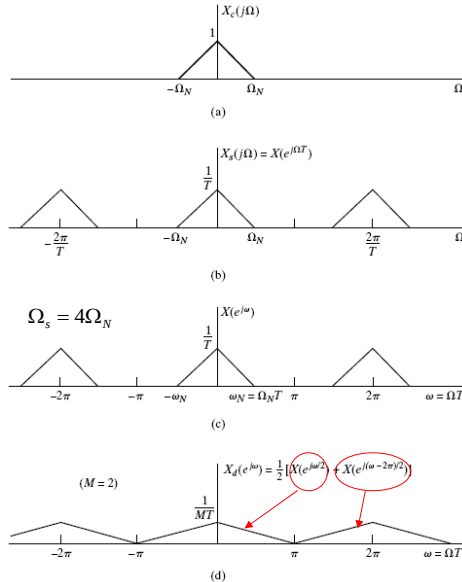
$$x_d[n] = x[nM] = x_c(nMT)$$

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(e^{j(\omega - 2\pi l)/M})$$

- M αντίγραφα του φάσματος
- Συχνότητα ανηγμένη (scaled) επί M

- Αποδεκατισμός (decimation)

- Αναδίπλωση (aliasing);



17

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Δειγματοληψία και Ανακατασκευή Σημάτων



• Αλλαγή της συχνότητας δειγματοληψίας

- Μείωση της f_s (downsampling)

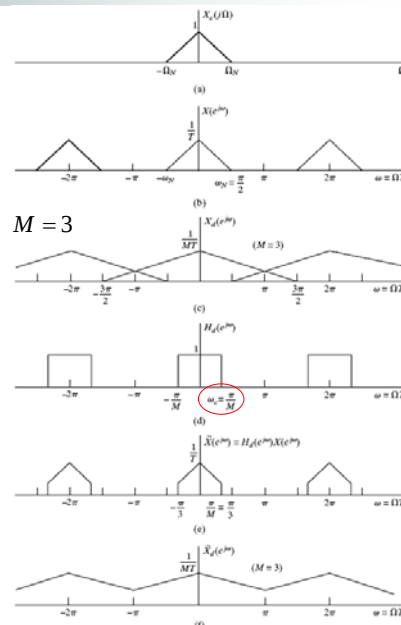
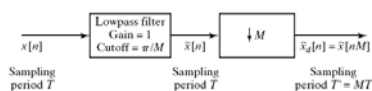
$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(e^{j(\omega - 2\pi l)/M})$$

- Για να αποφευχθεί η αναδίπλωση (aliasing)

$$X(e^{j\omega}) = 0, \quad \omega_N \leq |\omega| \leq 2\pi$$

και

$$\frac{2\pi}{M} \geq 2\omega_N \quad \text{or} \quad M\omega_N \leq \pi$$



18

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Δειγματοληψία και Ανακατασκευή Σημάτων



• Αλλαγή της συχνότητας δειγματοληψίας

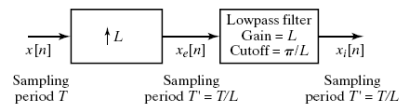
- Αύξηση της f_s (upsampling)

$$x_e[n] = \begin{cases} x[n/L], & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$x_e[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - kL]$$

$$\begin{aligned} X_e(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - kL] \right) e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\omega Lk} = X(e^{j\omega L}) \end{aligned}$$

- Συχνότητα ανηγμένη (scaled) δια L
- Ακολουθεί βαθυπερατό (lowpass) φίλτρο για αν αποφευχθεί αλλοίωση του σήματος



$$x[n] = x_e(nT)$$

$$x_e[n] = x_e(nT'), \quad T' = T/L$$

$$x_i[n] = x[n/L] = x_e(nT/L), \quad n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots$$



Δειγματοληψία και Ανακατασκευή Σημάτων

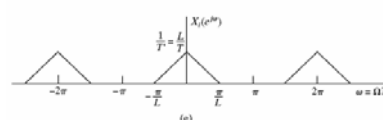
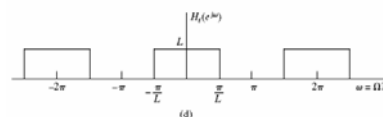
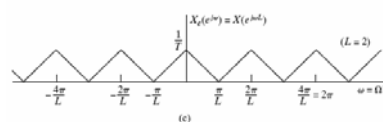
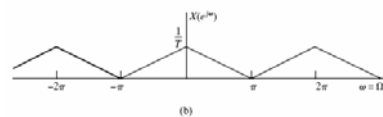
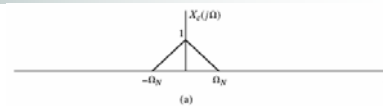
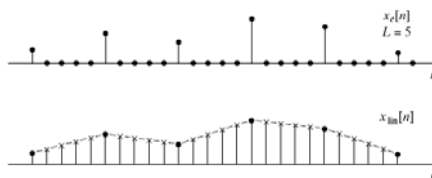


• Αλλαγή της συχνότητας δειγματοληψίας

- Αύξηση της f_s (upsampling)

- Παράδειγμα

- Παρεμβολή (interpolation)

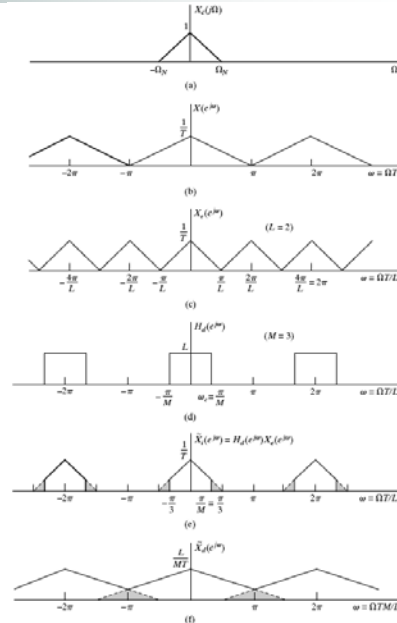
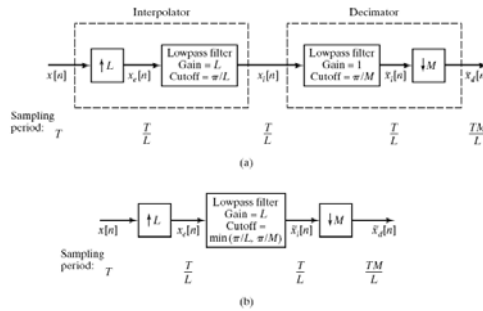




Δειγματοληψία και Ανακατασκευή Σημάτων



- Αλλαγή της συχνότητας δειγματοληψίας
 - Αλλαγή της f_s με μη-ακέραιο αριθμό



21 Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory

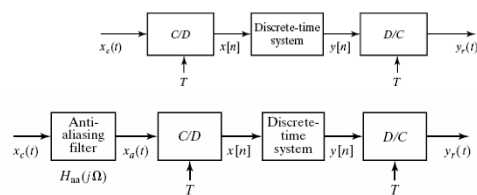


Δειγματοληψία και Ανακατασκευή Σημάτων

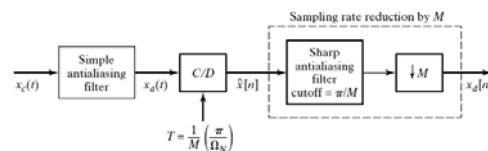


- Ψηφιοποίηση αναλογικών σημάτων
 - Αντι-αναδιπλωτικά φίλτρα

$$H_{aa}(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c < \frac{\pi}{T} \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c \end{cases}$$



- Πραγματικά φίλτρα δεν είναι τέλεια
 - Χρήση ψηλής f_s (oversampling) και αποδεκατισμό (decimation)



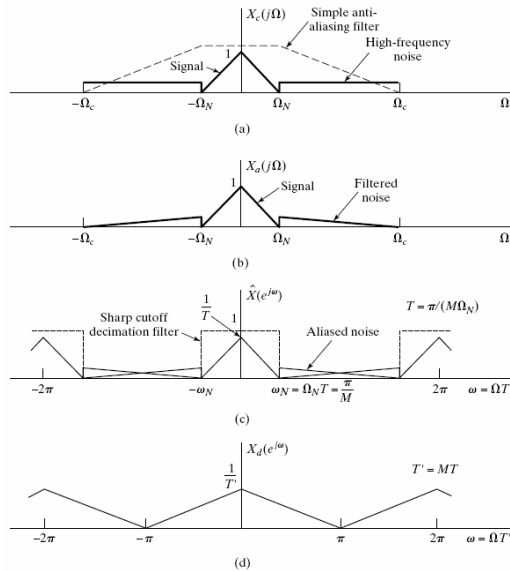
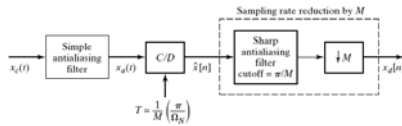
22 Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Δειγματοληψία και Ανακατασκευή Σημάτων



- Ψηφιοποίηση αναλογικών σημάτων
 - Αντι-αναδιπλωτικά φίλτρα



23 Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Δειγματοληψία και Ανακατασκευή Σημάτων



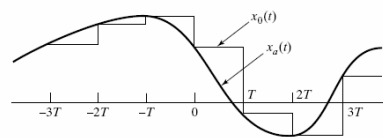
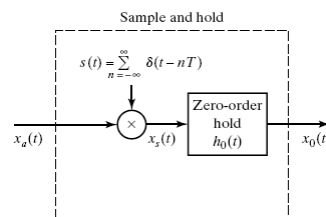
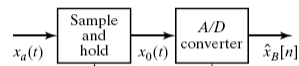
- Ψηφιοποίηση αναλογικών σημάτων
 - Αναлого-Ψηφιακή μετατροπή (analog-to-digital conversion ADC):
 - Διατήρηση τιμής (sample and hold)
 - ΑΨΜ (ADC)

- Διατήρηση τιμής (sample and hold)

$$x_o(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_o(t-nT)$$

$$h_o(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$x_o(t) = h_o(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT)$$



24 Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Δειγματοληψία και Ανακατασκευή Σημάτων



Ψηφιοποίηση αναλογικών σημάτων

2. ΑΨΜ (ADC)

$$\hat{x}[n] = Q(x[n])$$

Κβαντοποίηση (quantization)

- Η ψηφιακή έξοδος μπορεί να αλλάξει ανάλογα με το πρόβλημα

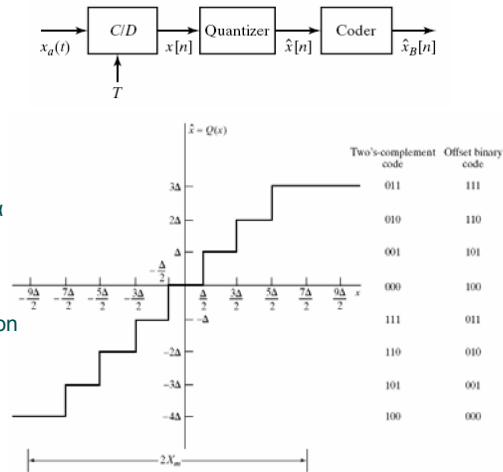
- $-\infty < x_a < +\infty$ ή $x_s > 0$
- Κλπ

- Βήμα κβαντοποίησης (quantization step)

$$\Delta = \frac{2X_m}{2^{B+1}} = \frac{X_m}{2^B}$$

$2X_m$ είναι το εύρος ψηφιοποίησης (digitization range)

B είναι ο αριθμός των δυαδικών ψηφίων (bits)



25

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Δειγματοληψία και Ανακατασκευή Σημάτων



Ψηφιοποίηση αναλογικών σημάτων

- Σφάλμα κβαντοποίησης (quantization error)

$$e[n] = \hat{x}[n] - x[n]$$

- Για $-X_m - \frac{\Delta}{2} < x[n] < X_m - \frac{\Delta}{2}$

$$-\frac{\Delta}{2} < e[n] < \frac{\Delta}{2} \quad (\text{rounding})$$

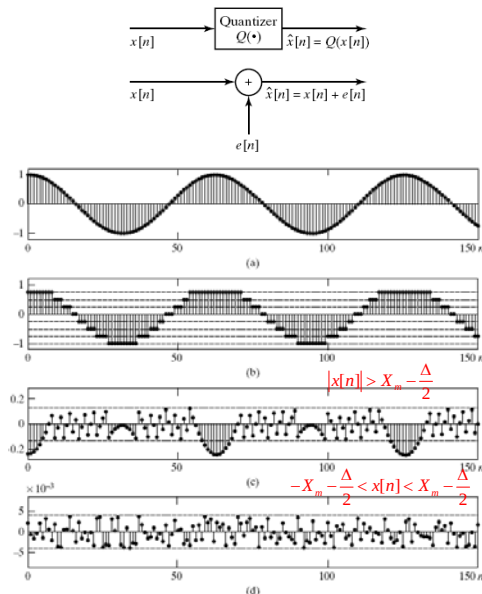
$$-\Delta < e[n] < 0 \quad (\text{truncation})$$

- Διαφορετικά

$$e[n] > \frac{\Delta}{2} \quad \text{or} \quad \Delta$$

- Σφάλμα (σχήμα d)

- Τυχαία διαδικασία
- Ασυσχετίστη (uncorrelated) με το σήμα
- Ομοιόμορφη κατανομή



26

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Δειγματοληψία και Ανακατασκευή Σημάτων



• Ψηφιοποίηση αναλογικών σημάτων

- Ισχύς (power) σφάλματος κβαντοποίησης

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 de$$

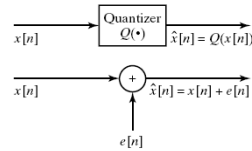
$$\sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{2^{-2B} X_m^2}{12}$$

- Λόγος Σήματος-Θορύβου (signal to noise ratio – SNR)

$$\text{SNR} = 10 \log \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} \right) = 10 \log \left(\frac{12 \cdot 2^{2B} \sigma_x^2}{X_m^2} \right) = 6.02B + 10.8 - 20 \log \left(\frac{X_m}{\sigma_x} \right)$$

$$\text{SNR} \propto -20 \log \left(\frac{X_m}{\sigma_x} \right)$$

- Το SNR αυξάνεται
 - 6dB για κάθε επιπρόσθετο ψηφίο
 - Το πλάτος του σήματος (σ_x) είναι της τάξης του εύρους X_m (γιατί όχι μεγαλύτερο;)



27

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Δειγματοληψία και Ανακατασκευή Σημάτων



• Παραγωγή αναλογικών σημάτων από ψηφιακά

- Ψηφιο-Αναλογική μετατροπή (digital-to-analog conversion DAC):

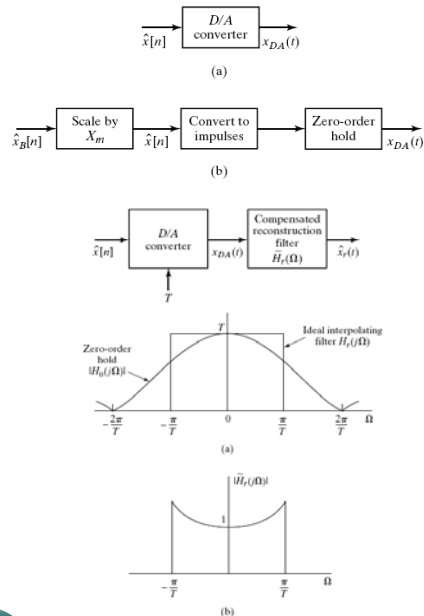
$$x_{DA}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_m \hat{x}_B[n] h_o(t - nT)$$

$$h_o(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$e_o(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] h_o(t - nT)$$

- Μπορούμε επιπλέον να αντισταθμίσουμε (compensate) για τη διαφορά με την ιδανική παρεμβολή (interpolation)

$$\hat{x}_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n] \frac{\sin[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T}$$



28

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory