



## Διάλεξη 4

# Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

(Κεφ. 8.0-8.7)



## Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier



- Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (discrete-time Fourier transform – DTFT)

- Χρήσιμο θεωρητικό εργαλείο
- Δύσκολος υπολογισμός με ψηφιακά μέσα (δηλ. υπολογιστές)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- Το άθροισμα είναι άπειρο
- Η συχνότητα  $\omega$  είναι συνεχής

- Διακριτός μετασχηματισμός Fourier (discrete Fourier transform – DFT)

- Διακριτή σειρά
- Δείγματα του DTFT
- Σήματα με περιορισμένη χρονική διάρκεια ή που μας ενδιαφέρει μόνο περιορισμένο μέρος

- Αρχίζουμε την ανάλυση με διακριτές σειρές Fourier (discrete Fourier Series – DFS)



## Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier



### • Διακριτές Σειρές Fourier

- Περιοδική σειρά με περίοδο N

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n + rN]$$

- Μπορεί να αναπαρασταθεί με μια σειρά Fourier (δηλ. άθροισμα μιγαδικών εκθετικών)

- Συχνότητες: ακέραια πολλαπλάσια της  $2\pi/N$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_k \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn}$$

- Χρειάζονται μόνο N μοναδικά αρμονικά εκθετικά

$$e^{j(2\pi/N)(k+mN)n} = e^{j(2\pi/N)kn} e^{j2\pi mn} = e^{j(2\pi/N)kn}$$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn}$$

3

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



## Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier



### • Διακριτές Σειρές Fourier

- Οι συντελεστές της διακριτής σειράς Fourier

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn}$$

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn}$$

- Η σειρά των συντελεστών είναι περιοδική με περίοδο N

$$\tilde{X}[k + N] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)(k+N)n} = \tilde{X}[k]$$

- Για ευκολία καθορίζουμε δύο εξισώσεις

$$W_N = e^{-j(2\pi/N)}$$

$$\text{• Σύνθεση} \quad \tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn}$$

$$\text{• Ανάλυση} \quad \tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn}$$

4

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



## Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier



### • Διακριτές Σειρές Fourier

- Παράδειγμα: Σειρά κρουστικών (impulse train)

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN]$$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)kn}$$

- Άθροισμα N εκθετικών
  - Ίσο πλάτος και φάση
  - Άθροισμα = 1 στις κρουστικές, 0 αλλού

5

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



## Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier



### • Μετασχηματισμός Fourier (ΜΦ) Περιοδικών Σημάτων

- ΜΦ μιγαδικών εκθετικών

$$x[n] = \sum_k a_k e^{j\omega_k n}, \quad -\infty < n < \infty$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_k 2\pi a_k \delta(\omega - \omega_k + 2\pi r)$$

- ΜΦ περιοδικού σήματος

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn}$$

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \tilde{X}[k] \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N})$$

- Σειρά κρουστικών με πλάτος  $\tilde{X}[k]$

6

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



## Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier



### • Μετασχηματισμός Fourier Περιοδικών Σημάτων

- ΜΦ σειράς κρουστικών (impulse train)

$$\tilde{p}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN]$$

- Συντελεστές σειράς Fourier

$$\tilde{P}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] W_N^{kn} = 1$$

- Μετασχηματισμός Fourier

$$\tilde{P}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N})$$

7

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



## Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier



### • Μετασχηματισμός Χρονικά Περιορισμένων (finite duration) Σημάτων

$x[n]$  ( $x[n] = 0$  outside of  $[0, N-1]$ )

- Περιοδικό σήμα

$$\tilde{x}[n] = x[n] * \tilde{p}[n] = x[n] * \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN]$$

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \tilde{P}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} X(e^{j(2\pi/N)k}) \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N})$$

- όμως

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \tilde{X}[k] \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N})$$

- άρα

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j(2\pi/N)k}) = X(e^{j\omega})|_{\omega=(2\pi/N)k}$$

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Συντελεστές τις σειράς Fourier  $\leftrightarrow$  Δείγματα του ΜΦ μιας περιόδου
- Είναι το  $X[k]$  ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier (ΔΜΦ) του  $x[n]$ ;

8

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



## Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier



### • Δειγματοληψία του Μετασχηματισμού Fourier

- Για μια μη περιοδική συνάρτηση

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \leftrightarrow x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

- Δειγματοληψία μετασχηματισμού

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=(2\pi/N)k} = X(e^{j(2\pi/N)k})$$

- Ποια σειρά καθορίζεται από τους συντελεστές  $X[k]$ ;

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j(2\pi/N)km} \right] W_N^{-kn} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-k(n-m)} \right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \tilde{p}[n-m] \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN] = \tilde{x}[n] \end{aligned}$$

9

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory

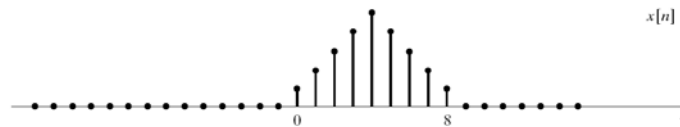


## Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

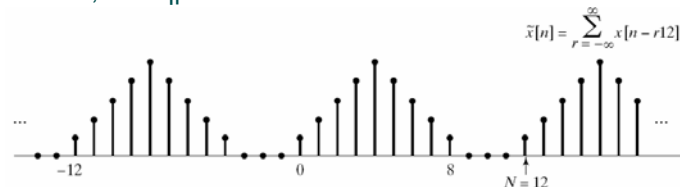


### • Δειγματοληψία του Μετασχηματισμού Fourier

- Παραδείγματα



- ΔΜΦ, 12 σημεία



- Οι συντελεστές της σειράς Fourier είναι ο διακριτός μετασχηματισμός του μη περιοδικού σήματος

10

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory

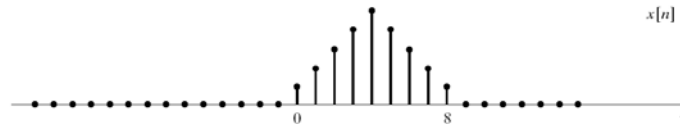


## Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

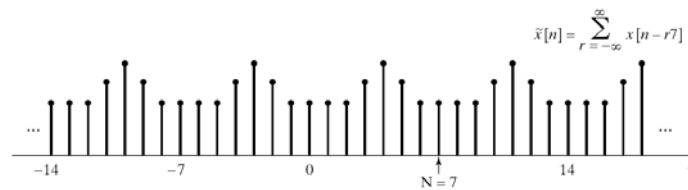


### • Δειγματοληψία του Μετασχηματισμού Fourier

- Παραδείγματα



- ΔΜΦ, 7 σημεία



- Οι συντελεστές της σειράς Fourier είναι ο διακριτός μετασχηματισμός κάποιου άλλου μη περιοδικού σήματος!

11

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



## Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier



### • Δειγματοληψία του Μετασχηματισμού Fourier

- Η σχέση μεταξύ μιας περιόδου του  $x[n]$  και του περιοδικού σήματος είναι μια μορφή αναδίπλωσης (aliasing) στο πεδίο του χρόνου
  - Μπορεί να αποφευχθεί αν το  $x[n]$  έχει περιορισμένη χρονική διάρκεια
  - Αντίστοιχο του περιορισμένου εύρος στην αναδίπλωση στο πεδίο της συχνότητας
- Μπορούμε να ανακτήσουμε την αρχική σειρά  $x[n]$  αν
  - Το αρχικό  $x[n]$  έχει περιορισμένη διάρκεια
  - Ο ΔΜΦ έχει  $N_{\Delta\text{ΜΦ}} \geq N_{\text{σήματος}}$

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Δεν χρειάζεται να ξέρουμε όλες τις συχνότητες του ΜΦ για να ανακτήσουμε μια διακριτή σειρά  $x[n]$ !

$$x[n] \rightarrow \tilde{x}[n] \rightarrow \text{DFS}, \tilde{X}[k] \rightarrow \tilde{x}[n] \rightarrow x[n]$$

12

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



## Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier



- Μετασχηματισμός Fourier

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

- Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου (ΜΦΔΧ)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

- Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (ΔΜΦ)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j(2\pi/N)kn}$$

13

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



## Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier



- Παραδείγματα

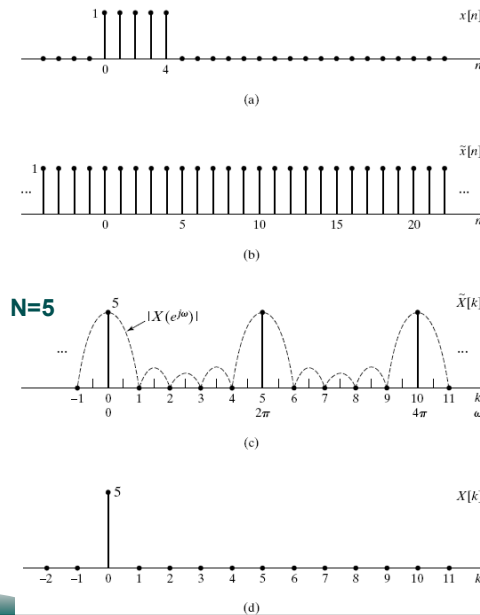


Figure 8.10 Illustration of the DFT. (a) Finite-length sequence  $x[n]$ . (b) Periodic sequence  $\tilde{x}[n]$  formed from  $x[n]$  with period  $N = 5$ . (c) Fourier series coefficients  $\tilde{X}[k]$  for  $\tilde{x}[n]$ . To emphasize that the Fourier series coefficients are samples of the Fourier transform,  $|X(e^{j\omega})|$  is also shown. (d) DFT of  $x[n]$ .

14

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



## Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier



### • Παραδείγματα

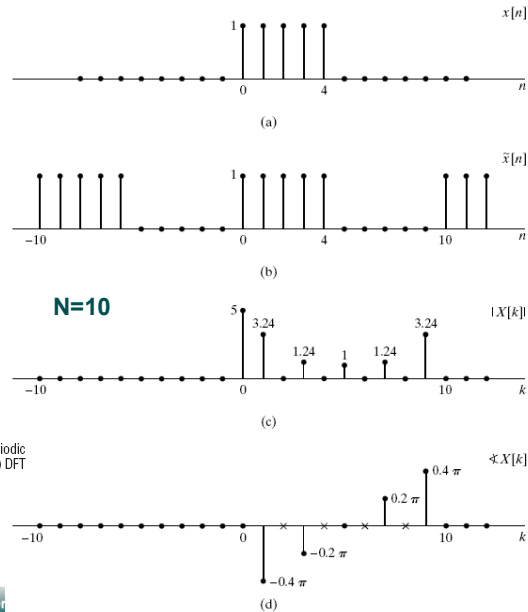


Figure 8.11 Illustration of the DFT. (a) Finite-length sequence  $x[n]$ . (b) Periodic sequence  $\tilde{x}[n]$  formed from  $x[n]$  with period  $N = 10$ . (c) DFT magnitude. (d) DFT phase. (x's indicate indeterminate values.)



## Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier



### • Ιδιότητες του ΔΜΦ

#### • Γραμμικότητα

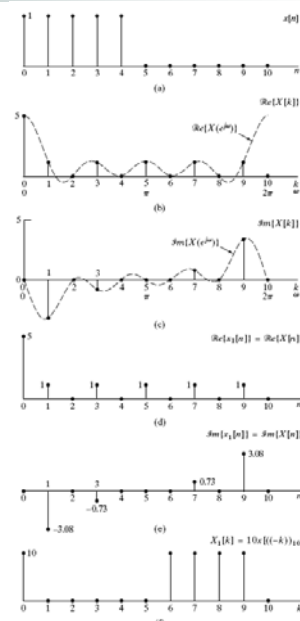
$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{DFT} aX_1[k] + bX_2[k]$$

#### • Δυσικότητα (duality)

$$x[n] \xleftrightarrow{DFT} X[k]$$

$$X[n] \xleftrightarrow{DFT} Nx[(-k)_N], \quad 0 \leq k \leq N-1$$

Figure 8.13 Illustration of duality. (a) Real finite-length sequence  $x_1[n]$ . (b) and (c) Real and imaginary parts of corresponding DFT  $X_1[k]$ . (d) and (e) The real and imaginary parts of the dual sequence  $x_2[n] = X_1[n]$ . (f) The DFT of  $x_2[n]$ .







## Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier



### • Ιδιότητες του ΔΜΦ

- Κυκλική μετατόπιση (circular shift)

$$x[n] \xleftrightarrow{DFT} X[k]$$

$$x_1[n] \xleftrightarrow{DFT} X_1[k] = e^{-j(2\pi k/N)m} X[k]$$

$$x_1[n] = \begin{cases} \tilde{x}_1[n] = \tilde{x}[n-m] = x[(n-m)_N], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

17

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory

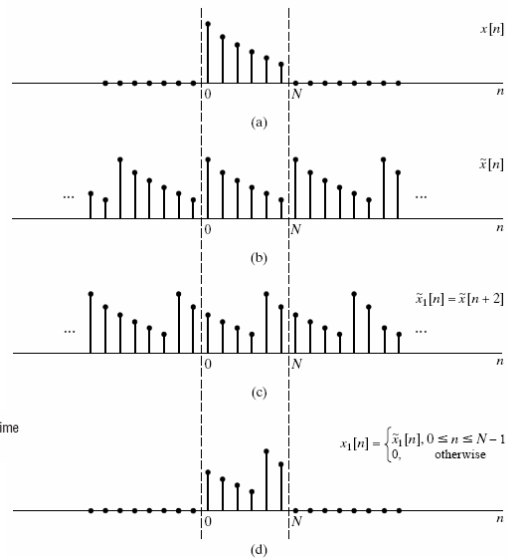


## Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier



### • Ιδιότητες του ΔΜΦ

- Κυκλική μετατόπιση (circular shift)



18

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



## Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier



### • Ιδιότητες του ΔΜΦ

- Κυκλική συνέλιξη (circular convolution)

$$\begin{aligned}
 x_3[n] &= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \tilde{x}_2[n-m], \quad 0 \leq n \leq N-1 \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1[((m))_N] x_2[((n-m))_N], \quad 0 \leq n \leq N-1 \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2[((n-m))_N], \quad 0 \leq n \leq N-1 \\
 x_3[n] &= x_1[n] \circledast x_2[n]
 \end{aligned}$$

19

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



## Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier



### • Ιδιότητες του ΔΜΦ

- Κυκλική συνέλιξη (circular convolution)

$$x_1[n] = \delta[n - n_0]$$

$$X_1[k] = W_N^{kn_0}$$

$$X_3[k] = W_N^{kn_0} X_2[k]$$

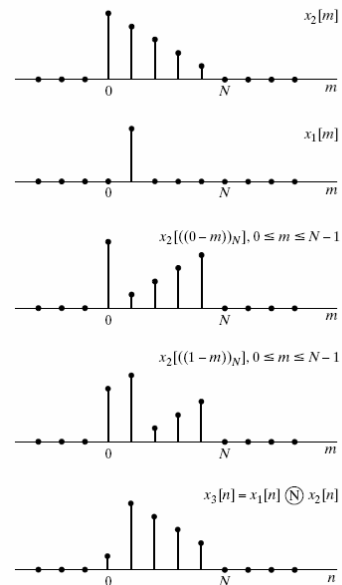


Figure 8.14 Circular convolution of a finite-length sequence  $x_2[n]$  with a single delayed impulse,  $x_1[n] = \delta[n - 1]$ .

20

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



## Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier



### • Ιδιότητες του ΔΜΦ

- Κυκλική συνέλιξη με ΔΜΦ

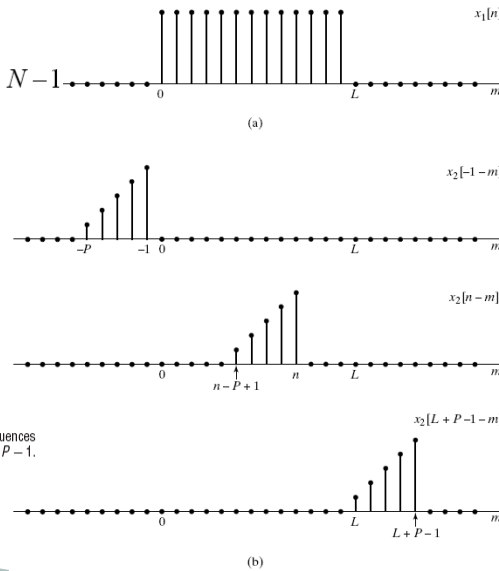
$$X_3[k] = X_1[k]X_2[k] \text{ for } 0 \leq k \leq N-1$$

inverse DFT of  $X_3[k]$

$$x_3[n] = x_1[n] \circledast x_2[n]$$

- Γραμμική συνέλιξη με ΔΜΦ;

Figure 8.17 Example of linear convolution of two finite-length sequences showing that the result is such that  $x_3[n] = 0$  for  $n \leq -1$  and for  $n \geq L + P - 1$ . (a) Finite-length sequence  $x_1[n]$ . (b)  $x_2[n - m]$  for several values of  $n$ .



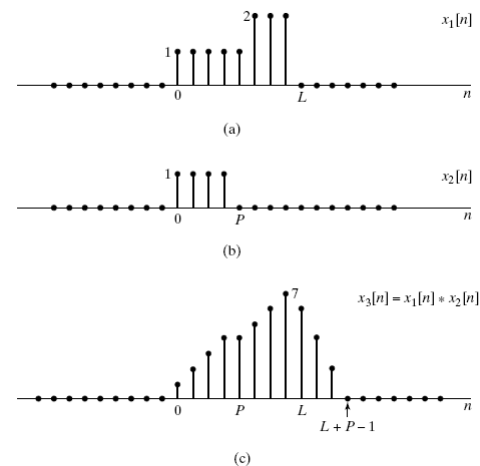
## Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier



### • Ιδιότητες του ΔΜΦ

- Γραμμική συνέλιξη με ΔΜΦ;

Figure 8.19 An example of linear convolution of two finite-length sequences.





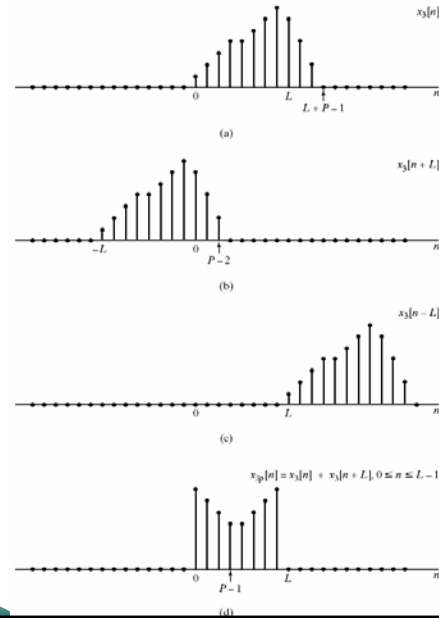
## Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier



### • Ιδιότητες του ΔΜΦ

- Γραμμική συνέλιξη με ΔΜΦ;

Figure 8.20 Interpretation of circular convolution as linear convolution followed by aliasing for the circular convolution of the two sequences  $x_1[n]$  and  $x_2[n]$  in Figure 8.19.



23

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



## Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier



### • Ιδιότητες του ΔΜΦ

- Γραμμική συνέλιξη με ΔΜΦ;

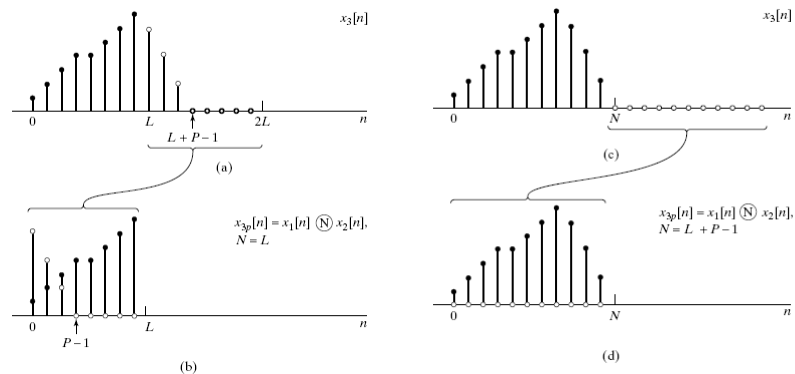


Figure 8.21 Illustration of how the result of a circular convolution "wraps around." (a) and (b)  $N = L$ , so the aliased "tail" overlaps the first  $(P-1)$  points. (c) and (d)  $N = (L+P-1)$ , so no overlap occurs.

24

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



# Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier



## • Ιδιότητες του ΔΜΦ

| Finite-Length Sequence (Length $N$ )                            | $N$ -point DFT (Length $N$ )                                                                                                                                                                                                                         |
|-----------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $x[n]$                                                       | $X[k]$                                                                                                                                                                                                                                               |
| 2. $x_1[n], x_2[n]$                                             | $X_1[k], X_2[k]$                                                                                                                                                                                                                                     |
| 3. $ax_1[n] + bx_2[n]$                                          | $aX_1[k] + bX_2[k]$                                                                                                                                                                                                                                  |
| 4. $X[n]$                                                       | $Nx[((-k))_N]$                                                                                                                                                                                                                                       |
| 5. $x[((n-m))_N]$                                               | $W_N^{km} X[k]$                                                                                                                                                                                                                                      |
| 6. $W_N^{kn} x[n]$                                              | $X[((k-\ell))_N]$                                                                                                                                                                                                                                    |
| 7. $\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2[((n-m))_N]$                      | $X_1[k]X_2[k]$                                                                                                                                                                                                                                       |
| 8. $x_1[n]x_2[n]$                                               | $\frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} X_1(\ell)X_2[((k-\ell))_N]$                                                                                                                                                                                         |
| 9. $x^*[n]$                                                     | $X^*[((-k))_N]$                                                                                                                                                                                                                                      |
| 10. $x^*[(((-n))_N)]$                                           | $X^*[k]$                                                                                                                                                                                                                                             |
| 11. $\mathcal{R}e\{x[n]\}$                                      | $X_{\text{ep}}[k] = \frac{1}{2}\{X[((k))_N] + X^*[(((-k))_N)]\}$                                                                                                                                                                                     |
| 12. $j\mathcal{I}m\{x[n]\}$                                     | $X_{\text{op}}[k] = \frac{1}{2j}\{X[((k))_N] - X^*[(((-k))_N)]\}$                                                                                                                                                                                    |
| 13. $x_{\text{ep}}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x^*[(((-n))_N)]\}$  | $\mathcal{R}e\{X[k]\}$                                                                                                                                                                                                                               |
| 14. $x_{\text{op}}[n] = \frac{1}{2j}\{x[n] - x^*[(((-n))_N)]\}$ | $j\mathcal{I}m\{X[k]\}$                                                                                                                                                                                                                              |
| Properties 15–17 apply only when $x[n]$ is real.                |                                                                                                                                                                                                                                                      |
| 15. Symmetry properties                                         | $\begin{cases} X[k] = X^*[(((-k))_N)] \\ \mathcal{R}e\{X[k]\} = \mathcal{R}e\{X^*[(((-k))_N)]\} \\ \mathcal{I}m\{X[k]\} = -\mathcal{I}m\{X^*[(((-k))_N)]\} \\  X[k]  =  X^*[(((-k))_N)]  \\ \angle\{X[k]\} = -\angle\{X^*[(((-k))_N)]\} \end{cases}$ |
| 16. $x_{\text{ep}}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x^*[(((-n))_N)]\}$  | $\mathcal{R}e\{X[k]\}$                                                                                                                                                                                                                               |
| 17. $x_{\text{op}}[n] = \frac{1}{2j}\{x[n] - x^*[(((-n))_N)]\}$ | $j\mathcal{I}m\{X[k]\}$                                                                                                                                                                                                                              |