



Διάλεξη 5

FFT και Ανάλυση με FFT

(Κεφ. 9.0-9.5, 10.0-10.2)



FFT



- Ο ΔΜΦ

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

- Ο αντίστροφος ΔΜΦ

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

- Θα επικεντρωθούμε στο ΔΜΦ αλλά όλα ισχύουν και για τον αντίστροφο ΔΜΦ
- Ο αριθμός πολλαπλασιασμών και προσθέσεων θα χρησιμοποιείται ως μέτρο του υπολογιστικού χρόνου του μετασχηματισμού
- Ο Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier (FFT) δεν είναι άλλος μετασχηματισμός, απλά ένας γρήγορος αλγόριθμος



FFT



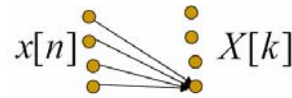
• Ευθύς υπολογισμός του ΔΜΦ

- Υπολογίζουμε μια φορά το

$$W_N^k = e^{-j(2\pi/N)k} \\ = \cos(2\pi k / N) + j \sin(2\pi k / N), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

- Μετά υπολογίσουμε για κάθε k

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$



- Για κάθε k χρειάζονται
 - N μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί
 - $N-1$ μιγαδικές προσθέσεις
- Για όλα τα k (N σύνολο) χρειάζονται
 - N^2 μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί
 - $N(N-1)$ μιγαδικές προσθέσεις

3

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



FFT



• Ευθύς υπολογισμός του ΔΜΦ

- Για μιγαδικά $x[n]$ και W

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} [(\operatorname{Re}\{x[n]\} \operatorname{Re}\{W_N^{kn}\} - \operatorname{Im}\{x[n]\} \operatorname{Im}\{W_N^{kn}\}) \\ + j(\operatorname{Re}\{x[n]\} \operatorname{Im}\{W_N^{kn}\} + \operatorname{Im}\{x[n]\} \operatorname{Re}\{W_N^{kn}\})], \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

- Για κάθε μιγαδικό πολλαπλασιασμό
 - 4 πραγματικούς πολλαπλασιασμούς και 2 πραγματικές προσθέσεις
- Για κάθε μιγαδική πρόσθεση
 - 2 πραγματικές προσθέσεις
- Για όλο τον ΔΜΦ χρειάζονται
 - $4N^2$ μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί
 - $N(4N-2)$ μιγαδικές προσθέσεις
 - Ανάλογος N^2
 - Μπορούμε να μειώσουμε τις πράξεις αν εκμεταλλευτούμε τη συμμετρία και την περιοδικότητα του W

4

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



FFT



- **Ιδιότητες του W**

$$W_N = e^{-j(2\pi/N)}$$

- **Μιγαδική Συζυγής Συμετρία**

$$W_N^{k[N-n]} = W_N^{-kn} = (W_N^{kn})^* = \text{Re}\{W_N^{kn}\} - j \text{Im}\{W_N^{kn}\}$$

- **Περιοδικότητα (σε k και n)**

$$W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n}$$

- **Για παράδειγμα**

$$\begin{aligned} & \text{Re}\{x[n]\} \text{Re}\{W_N^{kn}\} + \text{Re}\{x[N-n]\} \text{Re}\{W_N^{k[N-n]}\} \\ &= (\text{Re}\{x[n]\} + \text{Re}\{x[N-n]\}) \text{Re}\{W_N^{kn}\} \end{aligned}$$

- Μειώνεται ο αριθμός των πράξεων κατά 2

5

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



FFT



- **Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier (FFT)**

- Cooley και Tuckey (1965)
- Αλγόριθμος που εφαρμόζεται όταν ο αριθμός των στοιχείων είναι το γινόμενο δύο άλλων αριθμών
- Κατέληξε σε μια σειρά από πολύ αποδοτικούς αλγορίθμους
- Σήμερα τους λέμε όλους Γρήγορους Μετασχηματισμούς Fourier (FFT)
- Μοιράζεται ο μετασχηματισμός μήκους N σε όλο και μικρότερα κομμάτια
 - Αποδεκατισμός (decimation) στο χρόνο
 - Αποδεκατισμός (decimation) στη συχνότητα

6

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



FFT



• Αποδεκατισμός (decimation) στο χρόνο

- Το σήμα μοιράζεται σε όλο και μικρότερα κομμάτια (ζυγά και μονά στοιχεία)
- Λαμβάνεται υπ' όψη η περιοδικότητα και η συμμετρία του W

- Αν έχουμε σειρές με N δύναμη του 2

$$N = 2^v$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X[k] = \sum_{n \text{ even}} x[n] W_N^{kn} + \sum_{n \text{ odd}} x[n] W_N^{kn}$$

7

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



FFT



• Αποδεκατισμός (decimation) στο χρόνο

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n \text{ even}} x[n] W_N^{kn} + \sum_{n \text{ odd}} x[n] W_N^{kn} \\ &= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r] W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1] W_N^{(2r+1)k} \\ &= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r] (W_N^2)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1] (W_N^2)^{rk} \\ &= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r] W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1] W_{N/2}^{rk} \\ &= G[k] + W_N^k H[k], \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

- Όμως, λόγω συμμετρίας του W , υπολογίζουμε μόνο
 $k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$

8

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



FFT



• Αποδεδκατισμός (decimation) στο χρόνο

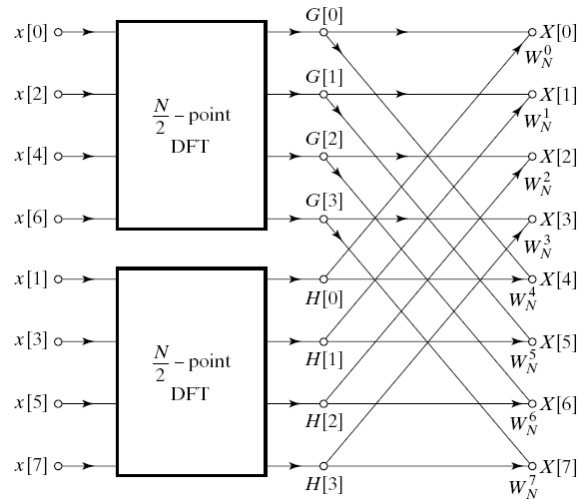


Figure 9.3 Flow graph of the decimation-in-time decomposition of an N -point DFT computation into two $(N/2)$ -point DFT computations ($N = 8$).

9

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



FFT



• Αποδεδκατισμός (decimation) στο χρόνο

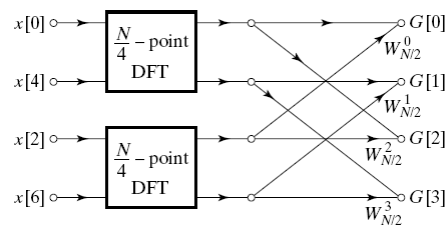


Figure 9.4 Flow graph of the decimation-in-time decomposition of an $(N/2)$ -point DFT computation into two $(N/4)$ -point DFT computations ($N = 8$).

10

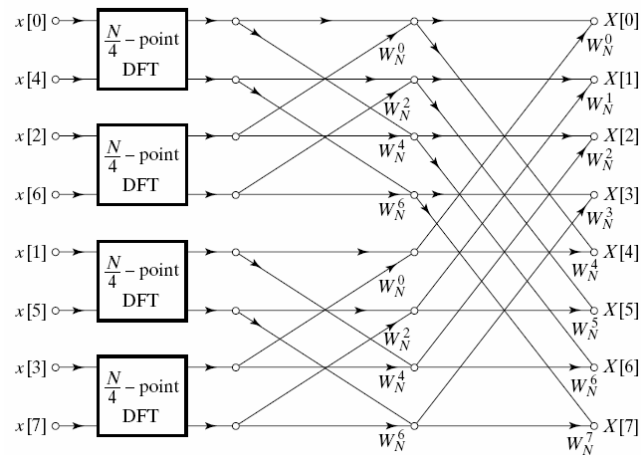
Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



FFT



• Αποδεδκατισμός (decimation) στο χρόνο



11 Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory

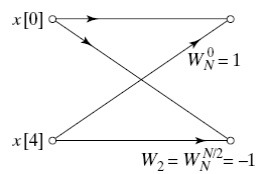
Figure 9.5 Result of substituting the structure of Figure 9.4 into Figure 9.3.



FFT



• Αποδεδκατισμός (decimation) στο χρόνο



12 Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory

Figure 9.6 Flow graph of a 2-point DFT.



FFT



• Αποδεκατισμός (decimation) στο χρόνο

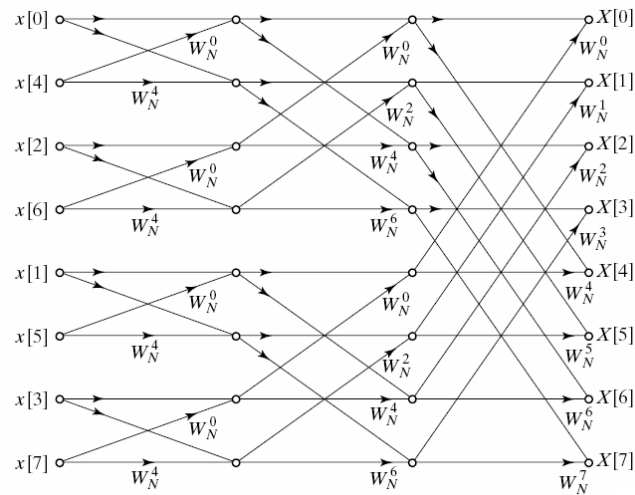


Figure 9.7 Flow graph of complete decimation-in-time decomposition of an 8-point DFT computation.



FFT



• Αποδεκατισμός (decimation) στο χρόνο

- Για κάθε στάδιο
 - Μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί: N
 - Μιγαδικές προσθέσεις: N
- Σύνολο
 - Στάδια: $\log_2 N$
 - $N \log_2 N$ προσθέσεις και πολλαπλασιασμοί
- Μεγάλη μείωση
 - $N = 2^{10} = 1024$
 - $N^2 = 1\,048\,576$
 - $N \log_2 N = 10\,240$
 - 100 φορές μείωση!



FFT



• Αποδεκατισμός (decimation) στο χρόνο

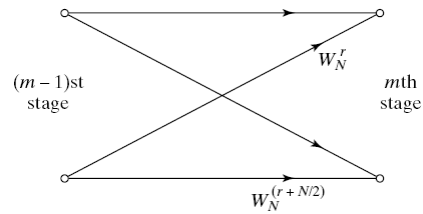


Figure 9.8 Flow graph of basic butterfly computation in Figure 9.7.

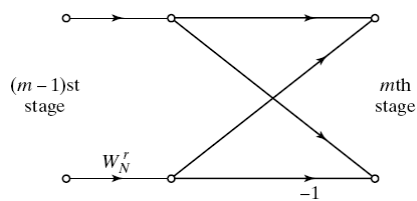


Figure 9.9 Flow graph of simplified butterfly computation requiring only one complex multiplication.



FFT



• Αποδεκατισμός (decimation) στο χρόνο

- Μείωση των μιγαδικών πολλαπλασιασμών στο μισό

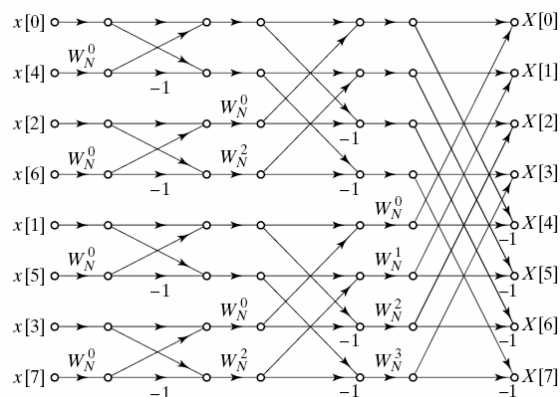


Figure 9.10 Flow graph of 8-point DFT using the butterfly computation of Figure 9.9.



FFT



• Αποδεδκατισμός (decimation) στη συχνότητα

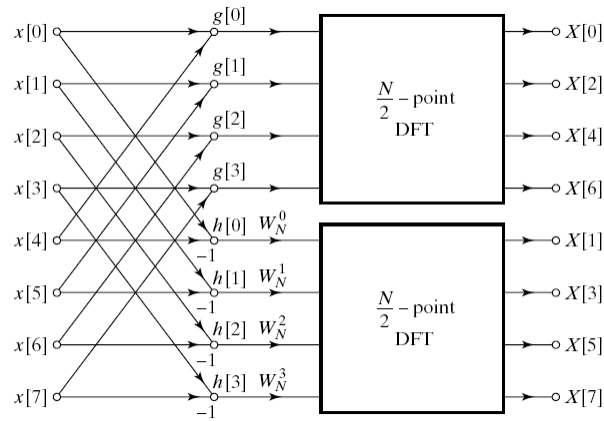


Figure 9.17 Flow graph of decimation-in-frequency decomposition of an N -point DFT computation into two $(N/2)$ -point DFT computations ($N = 8$).



FFT



• Αποδεδκατισμός (decimation) στη συχνότητα

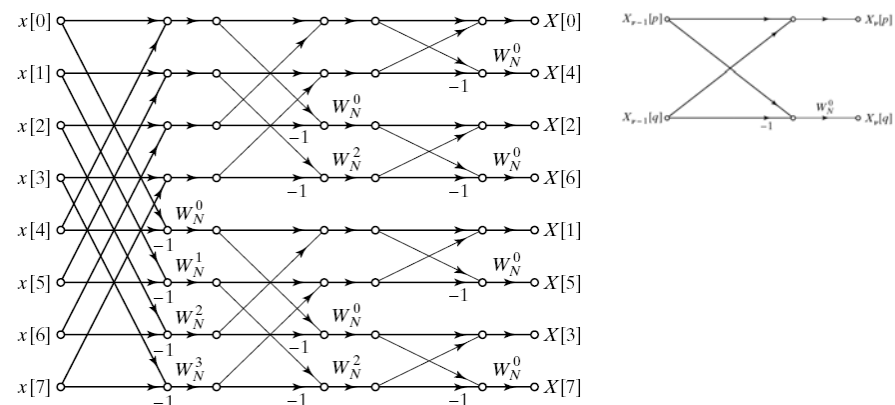


Figure 9.20 Flow graph of complete decimation-in-frequency decomposition of an 8-point DFT computation.



FFT



• Αναδιατάξεις της διαδικασίας

- Ίδιος αλγόριθμος με αναδιάταξη των διακλαδώσεων
- Σειρά με αντιστραμμένα ψηφία (bit-reversed order)
- Σειρά με στοιχεία σε σειρά
 - Σειριακή πρόσβαση και αποθήκευση δεδομένων
 - Όταν ο μετασχηματισμός δεν χωρά στη RAM

$$\begin{aligned}
 X_0[000] &= x[000], \\
 X_0[001] &= x[100], \\
 X_0[010] &= x[010], \\
 X_0[011] &= x[110], \\
 X_0[100] &= x[001], \\
 X_0[101] &= x[101], \\
 X_0[110] &= x[011], \\
 X_0[111] &= x[111].
 \end{aligned}$$

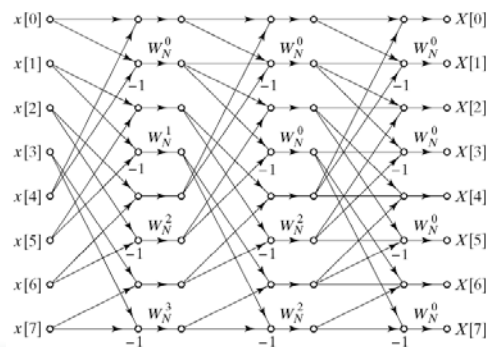


Figure 9.24 Rearrangement of Figure 9.20 having the same geometry for each stage, thereby permitting sequential data accessing and storage. (Transpose of Figure 9.16.)

19

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory

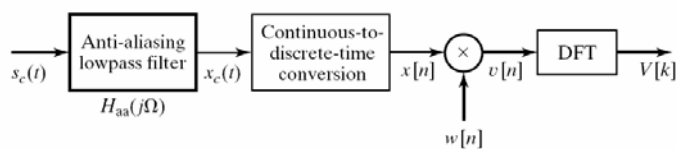


Ανάλυση με FFT



• Ανάλυση σημάτων

- Τι πρέπει να προσέξουμε
 - Επαρκής ψηφιοποίηση στο χρόνο (Nyquist)
 - Αναδίπλωση (aliasing) λόγω ψηφιοποίησης
 - Επαρκής ψηφιοποίηση στη συχνότητα (μέγεθος FFT)
 - Επαρκές μέγεθος FFT ώστε να αποφεύγουμε κυκλική συνέλιξη
 - Ευκρίνεια του μετασχηματισμού λόγω παράθυρου (window) στο χρόνο



20

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Ανάλυση με FFT

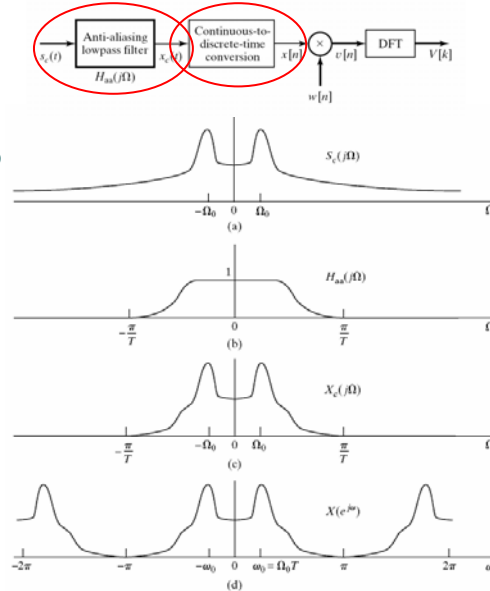


• Επαρκής συχνότητα ψηφιοποίησης

- Nyquist: $\geq 2 \Omega_{\max}$
- Για πιο ακριβείς μετρήσεις χρησιμοποιήστε 4-8 $\Omega_{\max}$ (αν το σύστημα σας το επιτρέπει)
- $f_s \uparrow \rightarrow \mathcal{E} \uparrow \uparrow$

• Αναδίπλωση (aliasing) λόγω ψηφιοποίησης

- Αν το σήμα δεν έχει πεπερασμένο (finite) φάσμα
- Φίλτρο $H(j\Omega)$ αποκόπτει τις συχνότητες πάνω από $|f_s/2|$



21

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Ανάλυση με FFT



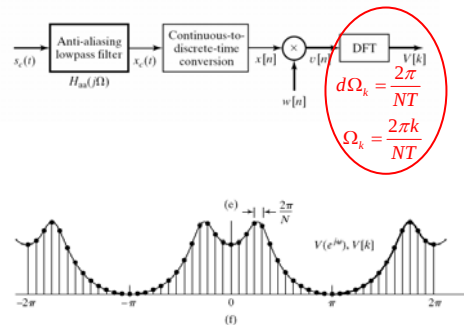
• Επαρκής ψηφιοποίηση στη συχνότητα (μέγεθος FFT)

- Ψηφιοποίηση πρέπει να είναι επαρκής ώστε να μπορούμε να "βλέπουμε" μικρές συχνότητες
- Nyquist στη συχνότητα
 - $d\Omega \rightarrow$ το μισό της μικρότερης συχνότητας που μπορούμε να δούμε

• Επαρκές μέγεθος FFT ώστε να αποφεύγουμε κυκλική συνέλιξη

- Μόνο αν θα ακολουθήσει συνέλιξη
- $N_{\text{FFT}} = N_1 + N_2 - 1$

• Το μέγεθος του FFT καθορίζεται και από τους δύο πιο πάνω παράγοντες



22

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Ανάλυση με FFT



• Παράδειγμα

- Σήμα
 - Φάσμα $X_c(j\Omega)=0$ για $|\Omega| \geq 2\pi(2500)$
- Θέλω τα δείγματα του φάσματος να μην απέχουν περισσότερο από $2\pi(10)$ rad/s ← **Προσοχή! Αυτό δεν είναι το ίδιο με την ευκρίνεια!**
- Συχνότητα δειγματοληψίας: _____
- Αριθμός στοιχείων FFT: _____
- Σημείο του FFT που αντιστοιχεί σε συχνότητα 1000 Hz: _____
- Αν το σύστημα δειγματοληψίας μας επιτρέπει μόνο μέχρι 2000 samples/s;

23

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory

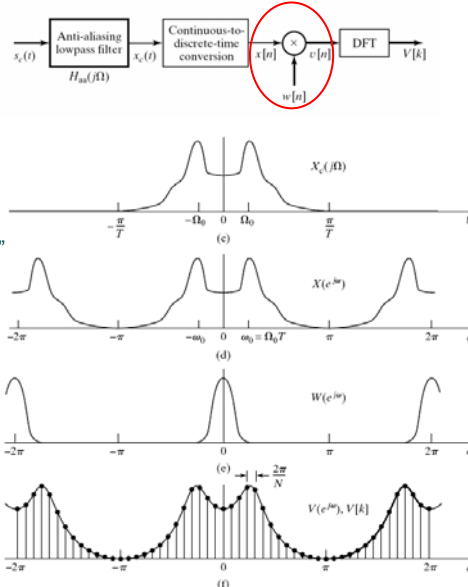
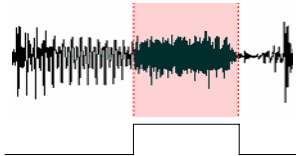


Ανάλυση με FFT



• Ευκρίνεια του μετασχηματισμού λόγω παράθυρου (window) στο χρόνο

- Πραγματικά σήματα → μεγάλος χρόνος σε σχέση με FFT
- Χρησιμοποιούμε μόνο μέρος του σήματος
 - Πολλαπλασιασμός με "παράθυρο"
 - Συνέλιξη του φάσματος με φάσμα του παραθύρου
 - Μειώνεται η ευκρίνεια στο χώρο της συχνότητας



24

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory

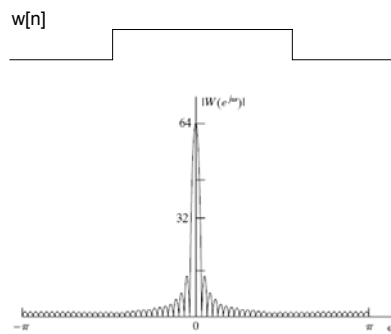


Ανάλυση με FFT

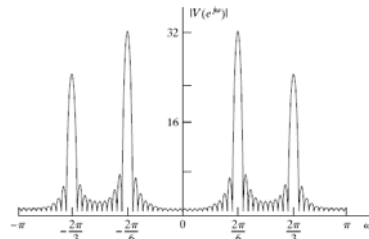


- Ευκρίνεια του μετασχηματισμού λόγω παράθυρου (window) στο χρόνο

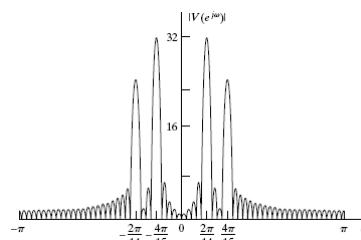
- Παράδειγμα
 - Δύο συνημίτονα Ω_0 και Ω_1
 - Τετραγωνικό παράθυρο



$$\Omega_0 = (2\pi/6) \times 10^4, \Omega_1 = (2\pi/3) \times 10^4$$



$$\Omega_0 = (2\pi/14) \times 10^4, \Omega_1 = (4\pi/15) \times 10^4$$



25 Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory

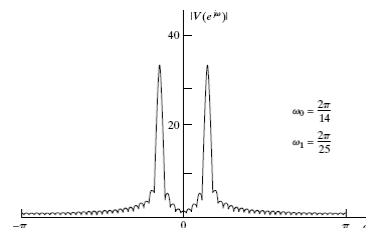
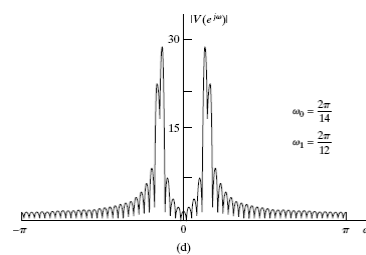
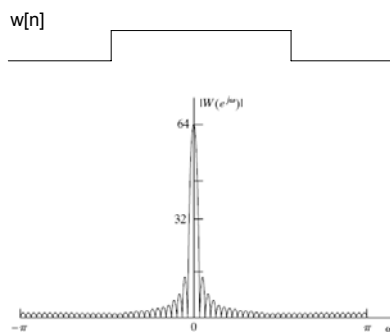


Ανάλυση με FFT



- Ευκρίνεια του μετασχηματισμού λόγω παράθυρου (window) στο χρόνο

- Παράδειγμα
 - Δύο συνημίτονα Ω_0 και Ω_1
 - Τετραγωνικό παράθυρο



26 Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory

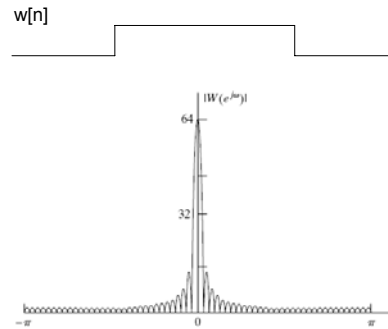


Ανάλυση με FFT



• Ευκρίνεια του μετασχηματισμού λόγω παράθυρου (window) στο χρόνο

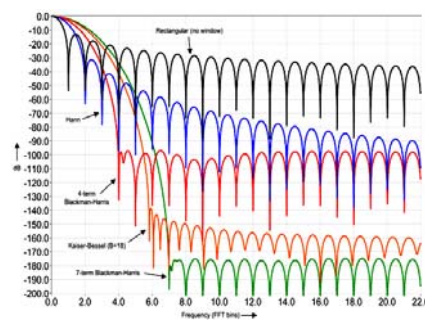
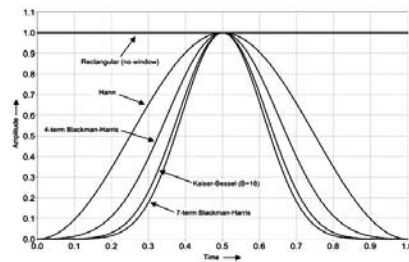
- Κυριότερα προβλήματα με το φάσμα του παραθύρου
 - Πλάτος του κυρίως λοβού (main lobe) $\rightarrow \Delta_{ml}$
 - Σχετικό ύψος πλευρικού λοβού / κυρίως λοβού (relative side-main lobe level) $\rightarrow A_{sl}$
 - Μείωση των πλευρικών λοβών ανά δεκάδα (side-lobe roll off per decade) $\rightarrow A_{ro}$



Ανάλυση με FFT



• Ευκρίνεια του μετασχηματισμού λόγω παράθυρου (window) στο χρόνο



Window type	-3 dB Main-lobe width	Max sidelobe level [dB]	Sidelobe roll-off [dB/decade]
Rectangular	$2\pi/t$	-13.2	20
Hamming	$8\pi/t$	-41.9	20
Hanning	$8\pi/t$	-31.6	60
Blackman	$12\pi/t$	-58	60



Ανάλυση με FFT



- **Παράδειγμα**

- Φωνητικό σήμα (π.χ. ομιλία)
 - Φάσμα 1-20 kHz
 - Διάρκεια 3 ώρες
- Ζητούμενα
 - Να διακρίνονται διαφορές συχνότητας ≤ 100 Hz
 - Να διακρίνονται συχνότητες με διαφορά στο πλάτος ≥ -45 dB (ονομάζεται και δυναμικό εύρος ή dynamic range)
 - Θα ακολουθήσει επεξεργασία με FFT και με συνέλιξη μεταξύ δύο τέτοιων σημάτων
- Χαρακτηριστικά
 - Παράθυρο: _____
 - f_s : _____
 - N : _____
 - N_{fft} : _____