



Διάλεξη 6

Fourier Ανάλυση Σημάτων

(Επανάληψη Κεφ. 10.0-10.2
Κεφ. 10.3, 10.5-7)

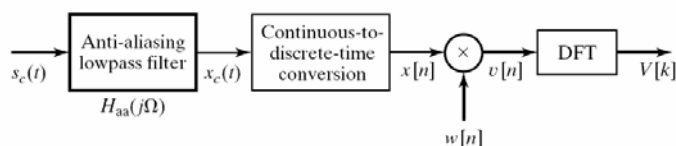


Fourier Ανάλυση Σημάτων



• Ανάλυση σημάτων

- Τι πρέπει να προσέξουμε
 - Επαρκής ψηφιοποίηση στο χρόνο (Nyquist)
 - Αναδίπλωση (aliasing) λόγω ψηφιοποίησης
 - Επαρκής ψηφιοποίηση στη συχνότητα (μέγεθος FFT)
 - Επαρκές μέγεθος FFT ώστε να αποφεύγουμε κυκλική συνέλιξη
 - Ευκρίνεια του μετασχηματισμού λόγω παράθυρου (window) στο χρόνο





Fourier Ανάλυση Σημάτων

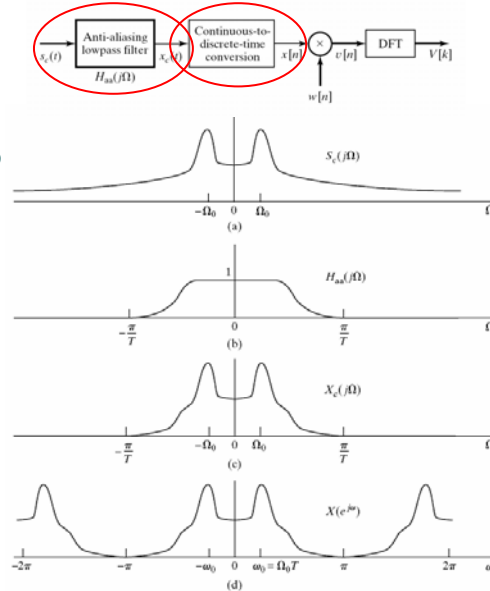


• Επαρκής συχνότητα ψηφιοποίησης

- Nyquist: $\geq 2 \Omega_{\max}$
- Για πιο ακριβείς μετρήσεις χρησιμοποιήστε 4-8 $\Omega_{\max}$ (αν το σύστημα σας το επιτρέπει)
- $f_s \uparrow \rightarrow \mathcal{E} \uparrow \uparrow$

• Αναδίπλωση (aliasing) λόγω ψηφιοποίησης

- Αν το σήμα δεν έχει πεπερασμένο (finite) φάσμα
- Φίλτρο $H(j\Omega)$ αποκόπτει τις συχνότητες πάνω από $|f_s/2|$



3

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Fourier Ανάλυση Σημάτων



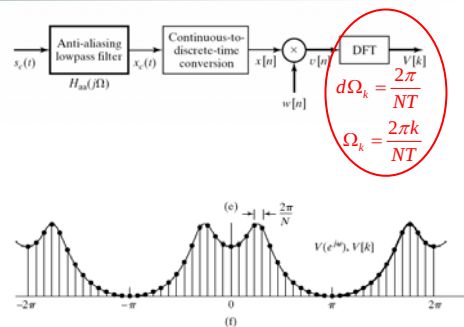
• Επαρκής ψηφιοποίηση στη συχνότητα (μέγεθος FFT)

- Ψηφιοποίηση πρέπει να είναι επαρκής ώστε να μπορούμε να "βλέπουμε" μικρές συχνότητες
- Nyquist στη συχνότητα
 - $d\Omega \rightarrow$ το μισό της μικρότερης συχνότητας που μπορούμε να δούμε

• Επαρκές μέγεθος FFT ώστε να αποφεύγουμε κυκλική συνέλιξη

- Μόνο αν θα ακολουθήσει συνέλιξη
- $N_{\text{FFT}} = N_1 + N_2 - 1$

• Το μέγεθος του FFT καθορίζεται και από τους δύο πιο πάνω παράγοντες



4

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Fourier Ανάλυση Σημάτων



• Παράδειγμα

- Σήμα
 - Φάσμα $X_c(j\Omega)=0$ για $|\Omega| \geq 2\pi(2500)$
- Θέλω τα δείγματα του φάσματος να μην απέχουν περισσότερο από $2\pi(10)$ rad/s ← **Προσοχή! Αυτό δεν είναι το ίδιο με την ευκρίνεια!**
- Συχνότητα δειγματοληψίας: _____
- Αριθμός στοιχείων FFT: _____
- Σημείο του FFT που αντιστοιχεί σε συχνότητα 1000 Hz: _____
- Αν το σύστημα δειγματοληψίας μας επιτρέπει μόνο μέχρι 2000 samples/s;

5

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory

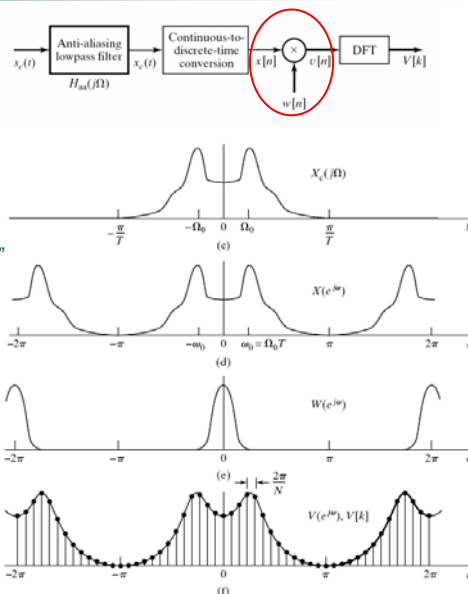
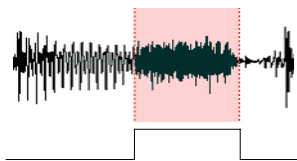


Fourier Ανάλυση Σημάτων



• Ευκρίνεια του μετασχηματισμού λόγω παράθυρου (window) στο χρόνο

- Πραγματικά σήματα → μεγάλος χρόνος σε σχέση με FFT
- Χρησιμοποιούμε μόνο μέρος του σήματος
 - Πολλαπλασιασμός με "παράθυρο"
 - Συνέλιξη του φάσματος με φάσμα του παραθύρου
 - Μειώνεται η ευκρίνεια στο χώρο της συχνότητας



6

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory

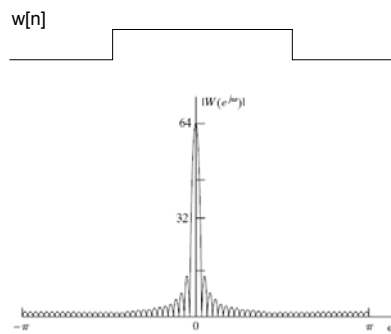


Fourier Ανάλυση Σημάτων

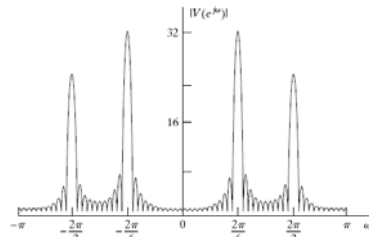


- Ευκρίνεια του μετασχηματισμού λόγω παράθυρου (window) στο χρόνο

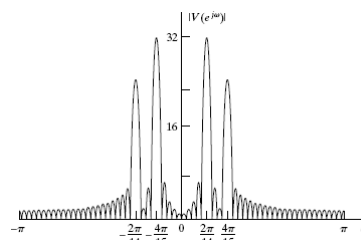
- Παράδειγμα
 - Δύο συνημίτονα Ω_0 και Ω_1
 - Τετραγωνικό παράθυρο



$$\Omega_0 = (2\pi/6) \times 10^4, \Omega_1 = (2\pi/3) \times 10^4$$



$$\Omega_0 = (2\pi/14) \times 10^4, \Omega_1 = (4\pi/15) \times 10^4$$



7

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory

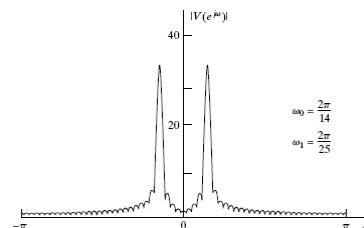
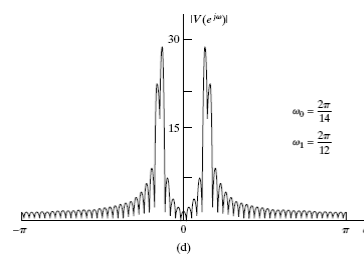
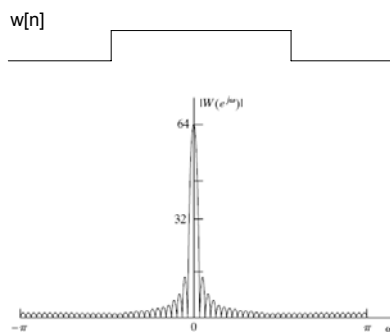


Fourier Ανάλυση Σημάτων



- Ευκρίνεια του μετασχηματισμού λόγω παράθυρου (window) στο χρόνο

- Παράδειγμα
 - Δύο συνημίτονα Ω_0 και Ω_1
 - Τετραγωνικό παράθυρο



8

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory

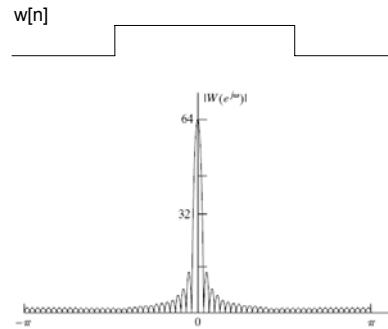


Fourier Ανάλυση Σημάτων



• Ευκρίνεια του μετασχηματισμού λόγω παράθυρου (window) στο χρόνο

- Κυριότερα προβλήματα με το φάσμα του παραθύρου
 - Πλάτος του κυρίως λοβού (main lobe) $\rightarrow \Delta_{ml}$
 - Σχετικό ύψος πλευρικού λοβού / κυρίως λοβού (relative side-main lobe level) $\rightarrow A_{sl}$
 - Μείωση των πλευρικών λοβών ανά δεκάδα (side-lobe roll off per decade) $\rightarrow A_{ro}$



9

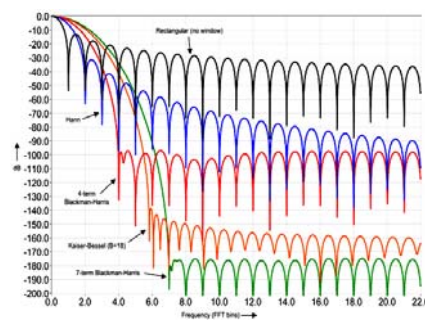
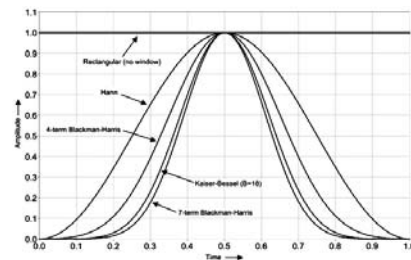
Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Fourier Ανάλυση Σημάτων



• Ευκρίνεια του μετασχηματισμού λόγω παράθυρου (window) στο χρόνο



Window type	-3 dB Main-lobe width	Max sidelobe level [dB]	Sidelobe roll-off [dB/decade]
Rectangular	$2\pi/t$	-13.2	20
Hamming	$8\pi/t$	-41.9	20
Hanning	$8\pi/t$	-31.6	60
Blackman	$12\pi/t$	-58	60

10

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Fourier Ανάλυση Σημάτων



• Παράδειγμα

- Φωνητικό σήμα (π.χ. ομιλία)
 - Φάσμα 1-20 kHz
 - Διάρκεια 3 ώρες
- Ζητούμενα
 - Να διακρίνονται διαφορές συχνότητας ≤ 100 Hz
 - Να διακρίνονται συχνότητες με διαφορά στο πλάτος ≥ -45 dB (ονομάζεται και δυναμικό εύρος ή dynamic range)
 - Θα ακολουθήσει επεξεργασία με FFT και με συνέλιξη μεταξύ δύο τέτοιων σημάτων
- Χαρακτηριστικά
 - Παράθυρο: _____
 - fs: _____
 - N: _____
 - N_{fft} : _____

11

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Fourier Ανάλυση Σημάτων



• Σήματα των οποίων η συχνότητα μεταβάλλεται με το χρόνο (π.χ. chirp)

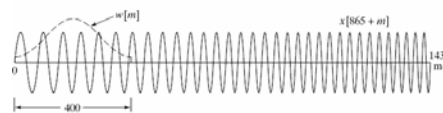
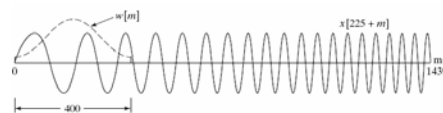
- Ένας FFT δεν είναι αρκετός
- Μετασχηματισμός Fourier Εξαρτώμενος από το χρόνο (Time Dependent Fourier Transform)

$$X[n, \lambda] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n+m]w[m]e^{-j\lambda m}$$

- η διακριτό και λ συνεχές
 - Σαν να βλέπουμε το σήμα μέσα από ένα παράθυρο
 - Θέλουμε παράθυρο με χαμηλούς πλευρικούς λοβούς και όσο το μεγαλύτερο γίνεται (γιατί;)
- Υπάρχει και ο αντίστροφος ΜΦ

$$x[n+m]w[m] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X[n, \lambda] e^{j\lambda m} d\lambda, \quad -\infty < m < \infty,$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi w[0]} \int_0^{2\pi} X[n, \lambda] d\lambda$$



12

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Fourier Ανάλυση Σημάτων



• Διακριτός χρόνος και συχνότητα

- Παράθυρο μήκους L

$$w[m] \neq 0 \text{ for } 0 \leq m \leq L-1$$

- N συχνότητες, ομοιόμορφα κατανεμημένες, $\lambda_k = 2\pi k/N$
- Αν $N \geq L$ τότε μπορούμε να ανακτήσουμε το σήμα
 - από n μέχρι $n+L-1$

$$X[n, k] = X[n, 2\pi k/N] = \sum_{m=0}^{L-1} x[n+m]w[m]e^{-j(2\pi/N)km}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$x[n+m]w[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[n, k]e^{j(2\pi/N)km}, \quad 0 \leq m \leq L-1$$

$$x[n+m] = \frac{1}{Nw[m]} \sum_{k=0}^{N-1} X[n, k]e^{j(2\pi/N)km}, \quad 0 \leq m \leq L-1$$

13

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Fourier Ανάλυση Σημάτων



• Διακριτός χρόνος και συχνότητα

$$x[n+m] = \frac{1}{Nw[m]} \sum_{k=0}^{N-1} X[n, k]e^{j(2\pi/N)km}, \quad 0 \leq m \leq L-1$$

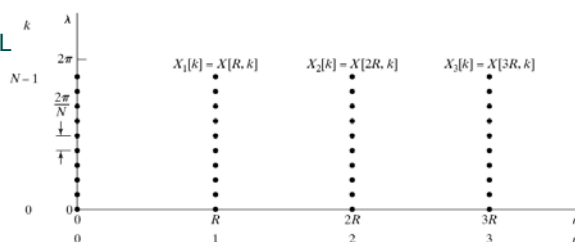
- Μπορούμε να ανακτήσουμε το σήμα

- μεταξύ $n_0 \leq n \leq n_0 + L - 1$ από το $X[n_0, k]$
- μεταξύ $n_0 + L \leq n \leq n_0 + 2L - 1$ από το $X[n_0 + L, k]$ κλπ

- Άρα

$$X[rR, k] = X[rR, 2\pi k/N] = \sum_{m=0}^{L-1} x[rR+m]w[m]e^{-j(2\pi/N)km}$$

- Για $N \geq L \geq R$
- Και όχι για $L > N, R > L$
- Γιατί;



14

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Fourier Ανάλυση Σημάτων



- Διακριτός χρόνος και συχνότητα

- Συνέλιξη στη συχνότητα
 - Σειρά από φίλτρα (Filter bank)
- Μπορούμε να ανακτήσουμε το σήμα αν ισχύουν όσα είδαμε πιο πριν

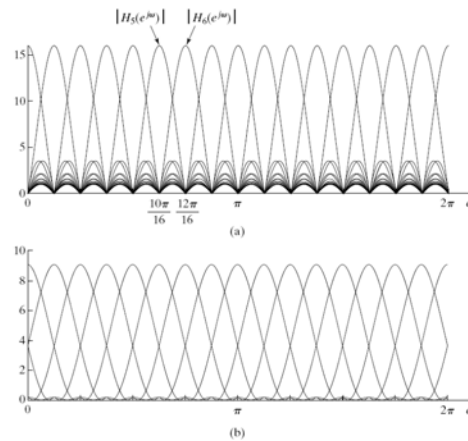


Figure 10.16 Filterbank frequency response. (a) Rectangular window. (b) Kaiser window.



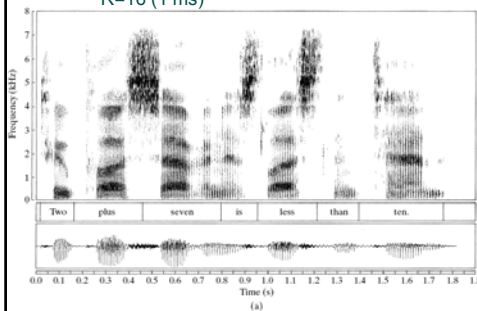
Fourier Ανάλυση Σημάτων



- Παράδειγμα

- Ανάλυση σημάτων από φωνή

Wideband
fs = 16kHz
6.7 ms Hamming window (L=108)
R=16 (1 ms)



Narrowband
fs = 16kHz
45 ms Hamming window (L=720)
R=16 (1 ms)

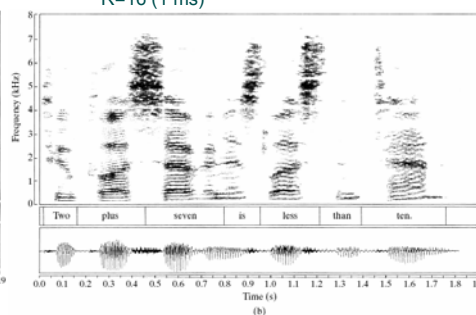


Figure 10.18 (a) Wideband spectrogram of waveform of Figure 10.17. (b) Narrowband spectrogram.



Fourier Ανάλυση Σημάτων



• ΔΜΦ → Φάσμα σήματος

- Ικανοποιητικά αποτελέσματα
 - Περιοδικά σήματα
 - Ψηλός SNR
- “Θόρυβος”;
 - Περιοδικότητα κρυμμένη στο θόρυβο
 - Σήματα που “μοιάζουν” με θόρυβο
- Προβλήματα στη εκτίμηση του φάσματος



• Φάσμα Ισχύος (Power Spectrum)

- Χρήσιμο στην ανάλυση τυχαίων σημάτων
- Μπορεί να υπολογιστεί με διάφορους τρόπους
 - Μη-Παραμετρικές Μέθοδοι
 - Παραμετρικές Μέθοδοι



Fourier Ανάλυση Σημάτων



• Υπολογισμός με DFT - Περιοδόγραμμα (Periodogram)

- $P_{xx} \rightarrow$ προσέγγιση P_{ss}

$$P_{xx}(\omega) = \frac{1}{T} P_{ss}\left(\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| < \pi,$$

$$V(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} w[n]x[n]e^{-j\omega n}$$

$$I(\omega) = \frac{1}{LU} |V(e^{j\omega})|^2$$

- Περιοδόγραμμα (Periodogram)
 - Τετραγωνικό Παράθυρο
- Τροποποιημένο Περιοδόγραμμα (Modified Periodogram)
 - Άλλο παράθυρο
- Υπολογισμός με ΔΜΦ σε συγκεκριμένες συχνότητες

$$I(\omega_k) = \frac{1}{LU} |V[k]|^2$$

$$\omega_k = 2\pi k/N \text{ for } k = 0, 1, \dots, N-1$$



- Το U αφαιρεί πόλωση (bias) λόγω του παραθύρου

$$\frac{1}{2\pi LU} \int_{-\pi}^{\pi} |W(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{LU} \sum_{n=0}^{L-1} (w[n])^2 = 1$$

$$U = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} (w[n])^2$$

- Τετραγωνικό Παράθυρο: $U=1$
- Άλλα Παράθυρα: $0 < U < 1$



Fourier Ανάλυση Σημάτων



• Ιδιότητες του Περιοδογράμματος

- Ασυμπτωτικά μη πολωμένο (Asymptotically unbiased)
 - Τείνει προς τη πραγματική μέση τιμή (expected value)
 - δηλ. πόλωση $\rightarrow 0$ με $L \rightarrow \infty$
 - Μη-Συμβιβαστό (Non-Consistent)
 - Η εκτίμηση δεν γίνεται καλύτερη με μεγαλύτερο L
- $$\text{var}[I(\omega)] \simeq P_{xx}^2(\omega)$$
- $\text{Var}[I(\omega)] > 0$ με $L \rightarrow \infty$

- Σχέση με συσχέτιση (correlation)

$$I(\omega) = \frac{1}{LU} \sum_{m=-(L-1)}^{L-1} c_{vv}[m] e^{-j\omega m}$$

- Όπου c_{vv} είναι η μη-περιοδική συσχέτιση (aperiodic correlation) του $v[n]$

$$c_{vv}[m] = \sum_{n=0}^{L-1} x[n] w[n] x[n+m] w[n+m]$$

$$v[n] = w[n] x[n]$$

19

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Fourier Ανάλυση Σημάτων

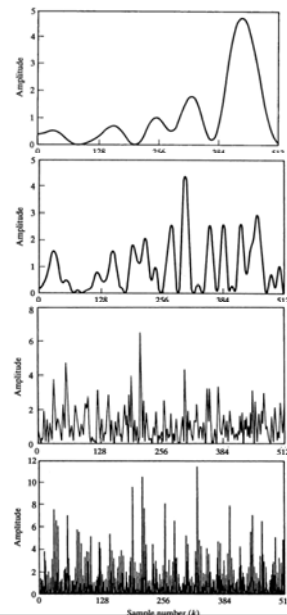


• Παράδειγμα

- $x[n]$ σειρά από τυχαίους αριθμούς με ομοιόμορφη κατανομή (uniform distribution)

$$|x[n]| \leq \sqrt{3}$$
- Θεωρητικά

$$P_{xx}(\omega) = \sigma_x^2 = 1 \text{ for all } \omega$$
- ΔΜΦ (N=1024) για L=16, 64, 256, 1024
 - Τετραγωνικό Παράθυρο (U=1)



20

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



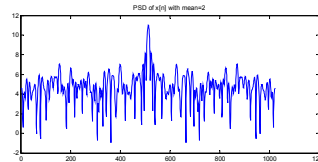
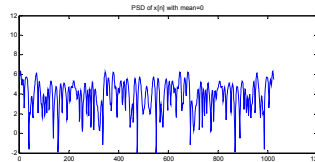
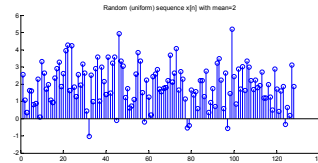
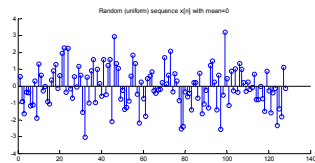
Fourier Ανάλυση Σημάτων



• Προβλήματα με το περιοδόγραμμα

- Πόλωση (bias) του σήματος
 - Κορυφή στη συχνότητα 0
 - Μπορεί να είναι τόσο μεγάλη που να επισκιάσει άλλα κοντινά σήματα
 - Αφαιρούμε εκτίμηση του μέσου όρου πριν το ΔΜΦ

$$\hat{m}_x = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x[n]$$



Fourier Ανάλυση Σημάτων

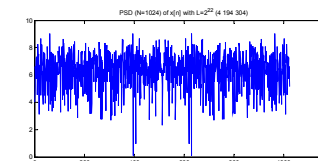
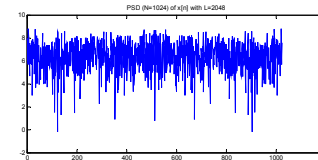
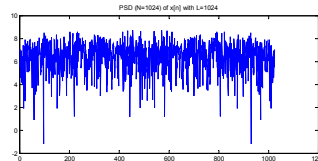
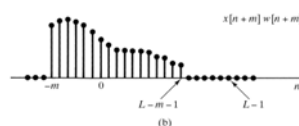
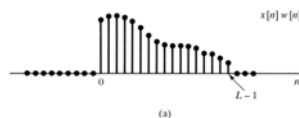


• Προβλήματα με το περιοδόγραμμα

- Διακυμάνσεις σε όλες τις συχνότητες
 - Μεταβολές στις τιμές της συσχέτισης όταν δεν υπάρχει μεγάλη επικάλυψη
 - Δεν βελτιώνεται με μεγαλύτερο L

$$I(\omega) = \frac{1}{LU} \sum_{m=-(L-1)}^{L-1} c_{vv}[m] e^{-j\omega m}$$

$$c_{vv}[m] = \sum_{n=0}^{L-1} x[n]w[n]x[n+m]w[n+m]$$





Fourier Ανάλυση Σημάτων



• Μέσος Όρος Περιοδογράμματος (Periodogram averaging)

- Σήμα μήκους Q
- R τμήματα μήκους L

$$x[n], 0 \leq n \leq Q-1$$

$$x_r[n] = x[rR + n]w[n], \quad 0 \leq n \leq L-1$$

$$I_r(\omega) = \frac{1}{LU} |X_r(e^{j\omega})|^2$$

$$\bar{I}(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{r=0}^{K-1} I_r(\omega)$$

- $R > Q/L$ τα τμήματα επικαλύπτονται
- $R = Q/L$ τα τμήματα είναι συνεχή

- Μειώνεται η διασπορά (variance)

$$\text{var}[\bar{I}(\omega)] \simeq \frac{1}{K} P_{xx}^2(\omega)$$

- Υπολογισμός με ΔΜΦ

$$I_r[k] = I_r(\omega_k) = \frac{1}{LU} |X_r[k]|^2$$

$$\bar{I}[k] = \bar{I}(\omega_k) = \frac{1}{K} \sum_{r=0}^{K-1} I_r[k]$$

- Μέθοδος Bartlett

- Μέσος όρος με τετράγωνο παράθυρο

$$C_{ww}(e^{j\omega}) = |W(e^{j\omega})|^2$$

$$C_{ww}(e^{j\omega}) = \left(\frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} \right)^2$$

- Για $K \uparrow$

- Αυξάνεται το εύρος (width) του κεντρικού λοβού
- Μειώνεται το πλάτος (amplitude) του κεντρικού λοβού

- Για σταθερό Q

- Όσο αυξάνεται το L μειώνεται το K
- Για καλύτερα αποτελέσματα πρέπει να αυξηθεί το Q

23

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



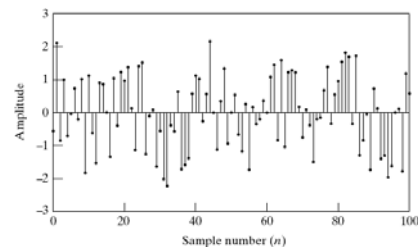
Fourier Ανάλυση Σημάτων



• Μέσος Όρος Περιοδογράμματος (Periodogram averaging)

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \theta) + e[n]$$

- $A=0.5$, $\omega_0=2\pi/21$
- $0 \leq \theta < 2\pi$ τυχαία
- $-\sqrt{3} \leq e[n] < \sqrt{3}$, ομοιόμορφη κατανομή
 - $\sigma_e^2 = 1$
- Τετραγωνικό παράθυρο
- $f_s = 1$ Hz
- $Q = 1024$
- $L = 1024, 256, 64, 16$
- $K = 1, 7, 31, 127$ (επικάλυψη $L/2$ για τα τρία τελευταία)
- $N_{\text{fft}} = 1024$



24

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory

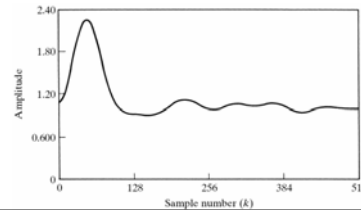
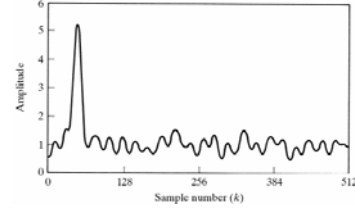
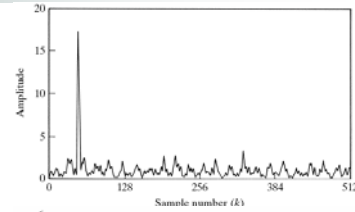
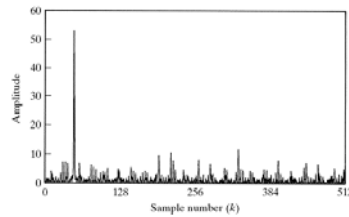


Fourier Ανάλυση Σημάτων



• Μέσος Όρος Περιοδογράμματος (Periodogram averaging)

- $Q = 1024$
- $L = 1024, 256, 64, 16$
- $K = 1, 7, 31, 127$ (επικάλυψη $L/2$ για τα τρία τελευταία)
- $N_{\text{fft}} = 1024$



25

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Fourier Ανάλυση Σημάτων



• Φάσμα Ισχύος από αυτοσυσχέτιση (autocorrelation)

- Ακόμα ένας τρόπος να αποφευχθούν τα προβλήματα του περιοδογράμματος
 - Όχι κατ' ανάγκη καλύτερος τρόπος
 - Βολικός όταν χρειάζεται και η αυτοσυσχέτιση για άλλους λόγους

$$v[n] = \begin{cases} x[n] & \text{for } 0 \leq n \leq Q-1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$I(\omega) = \frac{1}{LU} \sum_{m=-(L-1)}^{L-1} c_{vv}[m] e^{-j\omega m}$$

$$\hat{\phi}_{xx}[m] = \frac{1}{Q} c_{vv}[m] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{Q} |V(e^{j\omega})|^2 = I(\omega) = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \hat{\phi}_{xx}[m] w_c[m] e^{-j\omega m}$$

- Μπορούμε να επιλέξουμε 2M-1μήμα του ϕ
 - Αποφεύγουμε τις διακυμάνσεις στη συχνότητα
 - Εξομάλυνση του φάσματος λόγω συνέλιξης με παράθυρο

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I(\theta) W_c(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

- Το Φάσμα Ισχύος πρέπει να είναι θετικό για όλα τα k

$$W_c(e^{j\omega}) \geq 0 \quad \text{for } -\pi < \omega \leq \pi$$

- Ισχύει μόνο για τριγωνικό παράθυρο (Bartlett window)
- Ευκρίνεια και διασπορά
 - Εξαρτώνται από το μήκος του παραθύρου όπως και πριν
 - $Q \uparrow$ για καλύτερα αποτελέσματα

26

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Fourier Ανάλυση Σημάτων



- Φάσμα Ισχύος από αυτοσυσχέτιση (autocorrelation)

$$\hat{\phi}_{xx}[m] = \frac{1}{Q} \sum_{n=0}^{Q-|m|-1} x[n]x[n+|m|]$$

- Υπολογισμός με ΔΜΦ

1. (M-1) μηδενικά στο τέλος του x[n]
(για να αποφεύγετε την αναδίπλωση)

2. ΔΜΦ

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi/N)kn} \quad \text{for } k = 0, 1, \dots, N-1$$

3. |X(k)|²

$$|X[k]|^2 = X[k]X^*[k] \quad \text{for } k = 0, 1, \dots, N-1$$

4. Αντίστροφος ΔΜΦ

$$\hat{c}_{vv}[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2 e^{j(2\pi/N)km} \quad \text{for } m = 0, 1, \dots, N-1$$

5. Δια Q

$$\hat{\phi}_{xx}[m] = \frac{1}{Q} \hat{c}_{vv}[m] \quad \text{for } m = 0, 1, \dots, M-1$$

6. Πολλαπλασιασμός με παράθυρο
 $c_{vv}[-m] = c_{vv}[m]$

$$s[m] = \begin{cases} \hat{\phi}_{xx}[m]w_c[m], & 0 \leq m \leq M-1, \\ 0, & M \leq m \leq N-M, \\ \hat{\phi}_{xx}[N-m]w_c[N-m], & N-M+1 \leq m \leq N-1 \end{cases}$$

7. ΔΜΦ

$$S[k] = S(\omega)|_{\omega=2\pi k/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

27

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory



Παραμετρικές Μέθοδοι



- Μοντέλο Αυτοπαλινδρόμησης (Autoregressive Model)

- Εκτίμηση (estimation) με αυτοπαλινδρόμηση
 - Σήμα που "μειάζει" με θόρυβο
 - Εκτίμηση με βάση k προηγούμενες τιμές και μια τυχαία σειρά e[m]

- Συντελεστές a_k

- Ο αριθμός εξαρτάται από το σήμα
- "Αρκετοί" ώστε το φάσμα να ανταποκρίνεται στο πραγματικό
- Όχι υπερβολικοί γιατί μετά έχουμε θόρυβο
- Διάφορες μέθοδοι υπολογισμού
 - Π.χ. Μέθοδος Burg
 - Ελαχιστοποίηση (ελάχιστα τετράγωνα) του σφάλματος

- Εκτίμηση του Φάσματος Ισχύος

- Από τους συντελεστές a_k
- Ποιο κοντά στο πραγματικό για σήματα μικρής διάρκειας



$$x[m] = e[m] + \sum_{k=1}^p a_k x[m-k]$$

$$y[m] = x[m] + n[m]$$

$$y[m] = \sum_{k=1}^p a_k x[m-k] + e[m] + n[m]$$

$$P_{xx}^{AR} = \frac{\hat{\sigma}_x^2}{\left| 1 - \sum_{k=1}^p \hat{a}_k e^{-j2\pi f k} \right|^2}$$

28

Biomedical Imaging and Applied Optics Laboratory