University of Cyprus
Biomedical Imaging & Applied Optics

Διάλεξη 9

Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων με Μετασχηματισμούς

Κεφ. 5

(εκτός 5.7.4 και 5.3 μόνο από διάλεξη)

Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων

- Ένα ΓΧΑ σύστημα καθορίζεται πλήρως από
  - Κρουστική απόκριση (impulse response)

    $$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

  - Απόκριση Συχνότητας (frequency response)

    $$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

  - Απόκριση Συστήματος (system response)

    $$Y(z) = H(z)X(z)$$

Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων

- **Απόκριση Συχνότητας (frequency response)**
  - Σχέση μεταξύ μετασχηματισμών Fourier

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

$$|Y(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})| \cdot |X(e^{j\omega})|$$

$$\sphericalangle Y(e^{j\omega}) = \sphericalangle H(e^{j\omega}) + \sphericalangle X(e^{j\omega})$$

  - Τα αποτελέσματα του πλάτους και της φάσης μπορεί να είναι
    - Θετικά
    - Αρνητικά → παραμόρφωση (distortion)

- Παράδειγμα
  - Ιδανικό Χαμηλοπερατό (low pass) Φίλτρο

$$H_{\mathrm{lp}}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

$$h_{\mathrm{lp}}[n] = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}, \qquad -\infty < n < \infty$$

  - Ιδανικό Υψιπερατό (high pass) Φίλτρο

$$H_{\mathrm{hp}}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & |\omega| < \omega_c, \\ 1, & \omega_c < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

$$H_{\mathrm{hp}}(e^{j\omega}) = 1 - H_{\mathrm{lp}}(e^{j\omega})$$

$$h_{\mathrm{hp}}[n] = \delta[n] - h_{\mathrm{lp}}[n] = \delta[n] - \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$$

  - Άπειρη κρουστική απόκριση
    - $h[n] \neq 0$ για $-\infty < n < +\infty$
    - Μη-αιτιατό
    - Δεν μπορεί να εφαρμοστεί
  - Αιτιατές προσεγγίσεις μπορεί να έχουν παραμορφώσεις φάσης
    - Ιδανικά φίλτρα έχουν φάση 0

Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων

- **Αποτελέσματα της παραμόρφωσης φάσης (phase distortion)**
  - Ιδανικό σύστημα καθυστέρησης (ideal delay system)

$$h_{\mathrm{id}}[n] = \delta[n - n_d]$$
$$H_{\mathrm{id}}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}$$

$$|H_{\mathrm{id}}(e^{j\omega})| = 1$$
$$\sphericalangle H_{\mathrm{id}}(e^{j\omega}) = -\omega n_d, \qquad |\omega| < \pi$$

    - Γραμμική φάση
    - Η παραμόρφωση δεν είναι και τόσο σημαντική
    - Μπορεί να αντισταθμιστεί στο σύστημα
  - Φίλτρο με καθυστέρηση

$$H_{\mathrm{lp}}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega n_d}, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

$$h_{\mathrm{lp}}[n] = \frac{\sin \omega_c (n - n_d)}{\pi (n - n_d)}, \qquad -\infty < n < \infty$$

    - Και πάλι δεν είναι αιτιατό!

- Ομαδική Καθυστέρηση (group delay)
  - Μέτρο της γραμμικότητας της φάσης

$$\tau(\omega) = \mathrm{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega}\{\arg[H(e^{j\omega})]\}$$

  - Ο όρος $\arg[H(e^{j\omega})]$ είναι η συνεχής φάσης του $H(e^{j\omega})$

Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων

- **Συνεχής φάση (continuous phase)**
  - Κύρια τιμή (principal value) της φάσης
    - ARG[H(e$^{j\omega}$)]

    $$-\pi < \mathrm{ARG}[H(e^{j\omega})] \le \pi$$

    $$\sphericalangle H(e^{j\omega}) = \mathrm{ARG}[H(e^{j\omega})] + 2\pi r(\omega)$$
  - Συνεχής φάση
    - arg[H(e$^{j\omega}$)]
    - Όπως και η ARG[H(e$^{j\omega}$)] αλλά χωρίς ασυνέχειες ±π

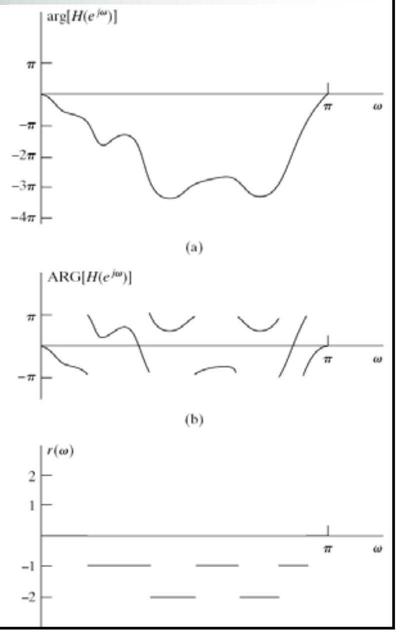


Figure 5.7 (a) Continuous-phase curve for a system function evaluated on the unit circle. (b) Principal value of the phase curve in part (a). (c) Integer multiples of 2π to be added to ARG[$H(e^{j\omega})$] to obtain arg[$H(e^{j\omega})$].

Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων

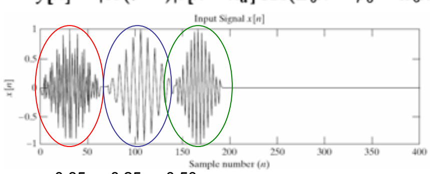
- **Παράδειγμα Εξασθένησης και Ομαδικής Καθυστέρησης**

  $$x[n] = s[n]\cos(\omega_0 n)$$

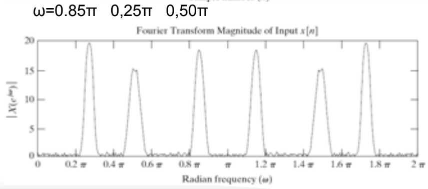
  - Για τιμές γύρω από το ω_0

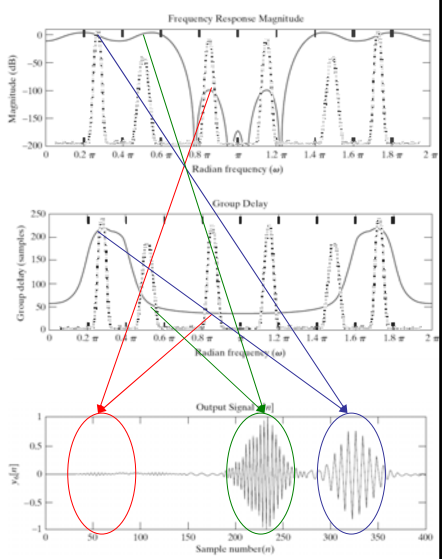
    $$\sphericalangle H(e^{j\omega}) \simeq -\phi_0 - \omega n_d$$

    $$y[n] = |H(e^{j\omega_0})| s[n - n_d] \cos(\omega_0 n - \phi_0 - \omega_0 n_d)$$



ω=0.85π 0,25π 0,50π





Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων

- **Απόκριση Συστήματος (System Response)**
  - Γραμμικές Εξισώσεις Διαφορών με Σταθερούς Συντελεστές (Linear Constant-Coefficient Difference Equations ή LCCDE)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\right) Y(z) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\right) X(z)$$

Example 5.2 Second-Order System

Suppose that the system function of a linear time-invariant system is

$$H(z) = \frac{(1+z^{-1})^2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)}. \qquad (5.20)$$

To find the difference equation that is satisfied by the input and output of this system, we express $H(z)$ in the form of Eq. (5.18) by multiplying the numerator and denominator factors to obtain the ratio of polynomials

$$H(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}. \qquad (5.21)$$

Thus,

$$\left(1+\tfrac{1}{4}z^{-1}-\tfrac{3}{8}z^{-2}\right)Y(z) = (1+2z^{-1}+z^{-2})X(z),$$

and the difference equation is

$$y[n]+\tfrac{1}{4}y[n-1]-\tfrac{3}{8}y[n-2] = x[n]+2x[n-1]+x[n-2]. \qquad (5.22)$$

Note that once the correspondence is well understood, it is possible to proceed directly from Eq. (5.21) to Eq. (5.22) without the intervening algebra (and vice versa).

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \qquad H(z) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})}$$

Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων

- **Σταθερότητα (stability) και Αιτιατότητα (causality)**
  - Σταθερότητα

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]z^{-n}| < \infty$$

    - Περιοχή σύγκλισης (ROC) περιλαμβάνει το |z|=1
  - Αιτιατότητα
    - h[n] → "δεξιά" συνάρτηση
    - Περιοχή σύγκλισης (ROC) έξω από τον πιο εξωτερικό πόλο

Example 5.3 Determining the ROC

Consider the LTI system with input and output related through the difference equation

$$y[n] - \tfrac{5}{2}y[n-1] + y[n-2] = x[n]. \qquad (5.25)$$

From the previous discussions, $H(z)$ is given by

$$H(z) = \frac{1}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1-2z^{-1})}. \qquad (5.26)$$

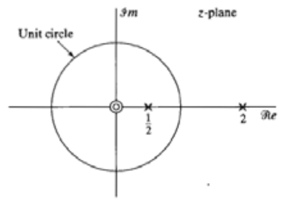


Figure 5.4 Pole–zero plot for Example 5.3.

The pole–zero plot for $H(z)$ is indicated in Figure 5.4. There are three possible choices for the ROC. If the system is assumed to be causal, then the ROC is outside the outermost pole, i.e., $|z| > 2$. In this case the system will not be stable, since the ROC does not include the unit circle. If we assume that the system is stable, then the ROC will be $\frac{1}{2} < |z| < 2$. For the third possible choice of ROC, $|z| < \frac{1}{2}$, the system will be neither stable nor causal.

Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων

- **Αντίστροφα Συστήματα (Inverse Systems)**

$$G(z) = H(z)H_i(z) = 1$$

$$g[n] = h[n] * h_i[n] = \delta[n]$$

$$H_i(z) = \frac{1}{H(z)}$$

$$H(z) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)\frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - d_k z^{-1})} \qquad H_i(z) = \left(\frac{a_0}{b_0}\right)\frac{\prod_{k=1}^{N}(1 - d_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}$$

  - Οι πόλοι του H είναι μηδενικά του Hi και αντίστροφα
  - Οι περιοχές σύγκλησης πρέπει να επικαλύπτονται (για αν υπάρχει η συνέλιξη)
  - Για να είναι αιτιατό το αντίστροφο σύστημα $|z| > \max_k |c_k|$
  - Για να είναι και σταθερό το αντίστροφο σύστημα $\max_k |c_k| < 1$

Example 5.5 Inverse for System with a Zero in the ROC

Suppose that $H(z)$ is

$$H(z) = \frac{z^{-1} - 0.5}{1 - 0.9z^{-1}}, \qquad |z| > 0.9.$$

The inverse system function is

$$H_i(z) = \frac{1 - 0.9z^{-1}}{z^{-1} - 0.5} = \frac{-2 + 1.8z^{-1}}{1 - 2z^{-1}}.$$

As before, there are two possible regions of convergence: $|z| < 2$ and $|z| > 2$. In this case, however, *both* regions overlap with $|z| > 0.9$, so both are valid inverse systems. The corresponding impulse response for an ROC $|z| < 2$ is

$$h_{i1}[n] = 2(2)^n u[-n-1] - 1.8(2)^{n-1} u[-n]$$

and, for an ROC $|z| > 2$, is

$$h_{i2}[n] = -2(2)^n u[n] + 1.8(2)^{n-1} u[n-1].$$

We see that $h_{i1}[n]$ is stable and noncausal, while $h_{i2}[n]$ is unstable and causal.

Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων

- **Συστήματα με άπειρη κρουστική απόκριση (infinite impulse response)**

$$H(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}$$

$$h[n] = \sum_{r=0}^{M-N} B_r \delta[n-r] + \sum_{k=1}^{N} A_k d_k^n u[n]$$

  - IIR → Έχουν τουλάχιστον ένα πόλο εκτός από το μηδέν

Example 5.6 A First-Order IIR System

Consider a causal system whose input and output satisfy the difference equation

$$y[n] - ay[n-1] = x[n]. \qquad (5.36)$$

The system function is (by inspection)

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}. \qquad (5.37)$$

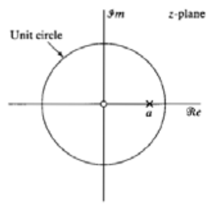


Figure 5.5 Pole–zero plot for Example 5.6.

Figure 5.5 shows the pole–zero plot of $H(z)$. The region of convergence is $|z| > |a|$, and the condition for stability is $|a| < 1$. The inverse z-transform of $H(z)$ is

$$h[n] = a^n u[n]. \qquad (5.38)$$

Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων

- **Συστήματα με πεπερασμένη κρουστική απόκριση (finite impulse response)**

$$H(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} \qquad h[n] = \sum_{r=0}^{M-N} B_r \delta[n-r] + \sum_{k=1}^{N} A_k d_k^n u[n]$$

  - FIR → Έχουν πόλους μόνο στο μηδέν

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k] = \begin{cases} b_n, & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων

Example 5.7 A Simple FIR System

Consider an impulse response that is a truncation of the impulse response of Example 5.6:

$$h[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \le n \le M, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then the system function is

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M} a^n z^{-n} = \frac{1 - a^{M+1} z^{-M-1}}{1 - a z^{-1}}. \tag{5.42}$$

Since the zeros of the numerator are at

$$z_k = a e^{j2\pi k/(M+1)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, M, \tag{5.43}$$

where a is assumed real and positive, the pole at $z = a$ is canceled by a zero. The pole-zero plot for the case $M = 7$ is shown in Figure 5.6.

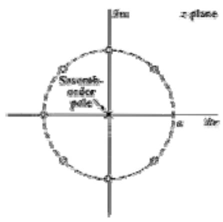


Figure 5.6 Pole-zero plot for Example 5.7.

The difference equation satisfied by the input and output of the linear time-invariant system is the discrete convolution

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} a^k x[n-k]. \tag{5.44}$$

However, Eq. (5.42) suggests that the input and output also satisfy the difference equation

$$y[n] - a y[n-1] = x[n] - a^{M+1} x[n-M-1]. \tag{5.45}$$

These two equivalent difference equations result from the two equivalent forms of $H(z)$ in Eq. (5.42).

Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων

- **Απόκριση Συχνότητας από Απόκριση Συστήματος**

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \qquad H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}} \qquad H(e^{j\omega}) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right) \frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k e^{-j\omega})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - d_k e^{-j\omega})}$$

  - Πλάτος

$$|H(e^{j\omega})| = \left|\frac{b_0}{a_0}\right| \frac{\prod_{k=1}^{M}|1 - c_k e^{-j\omega}|}{\prod_{k=1}^{N}|1 - d_k e^{-j\omega}|}$$

  - Φάση

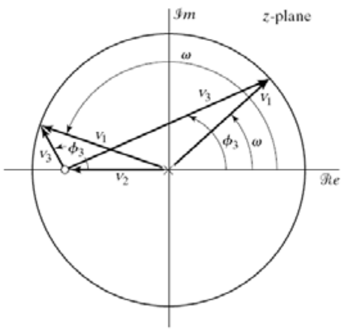
$$\sphericalangle H(e^{j\omega}) = \sphericalangle\left[\frac{b_0}{a_0}\right] + \sum_{k=1}^{M} \sphericalangle[1 - c_k e^{-j\omega}] - \sum_{k=1}^{N} \sphericalangle[1 - d_k e^{-j\omega}]$$

  - Ομαδική Καθυστέρηση

$$\mathrm{grd}[H(e^{j\omega})] = \sum_{k=1}^{N} \frac{d}{d\omega}(\arg[1 - d_k e^{-j\omega}]) - \sum_{k=1}^{M} \frac{d}{d\omega}(\arg[1 - c_k e^{-j\omega}])$$

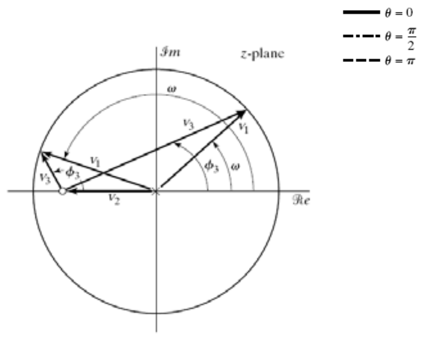
Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων

- **Απόκριση Συχνότητας από Απόκριση Συστήματος**
  - Πλάτος
    - Τα μηδενικά το “τραβούν” στο μηδέν
    - Οι πόλοι το “τραβούν” στο άπειρο
    - Όσο πιο κοντά στο |z|=1 τόσο ποιο πολύ “τραβούν”
  - Φάση
    - Οι γωνίες από τα μηδενικά προστίθενται
    - Οι γωνίες από τους πόλους αφαιρούνται
  - Ομαδική Καθυστέρηση
    - Παράγωγος της φάσης



Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων

- Απόκριση Συχνότητας από Απόκριση Συστήματος



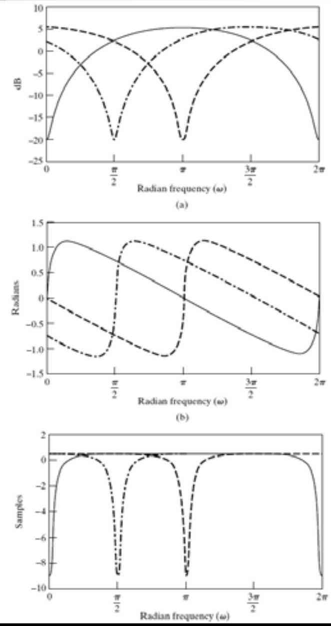
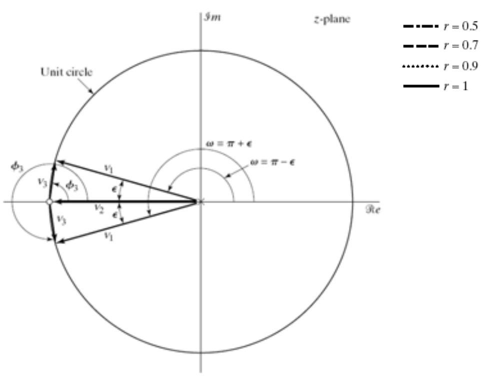


Figure 5.8 Frequency response for a single zero, with $r = 0.9$ and the three values of θ shown. (a) Log magnitude. (b) Phase. (c) Group delay.

Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων

- Απόκριση Συχνότητας από Απόκριση Συστήματος



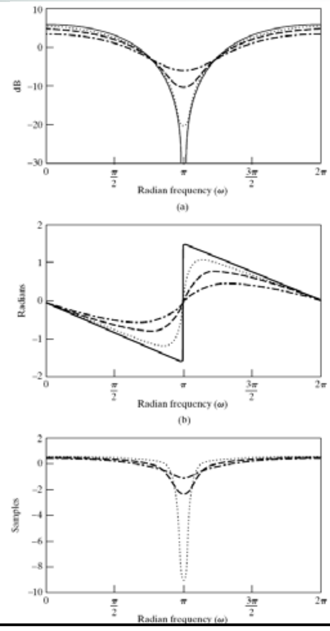


Figure 5.11 Frequency response for a single zero, with $\theta = \pi$, $r = 1, 0.9, 0.7,$ and 0.5. (a) Log magnitude. (b) Phase. (c) Group delay for $r = 0.9, 0.7,$ and 0.5.

Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων

• Απόκριση Συχνότητας από Απόκριση Συστήματος

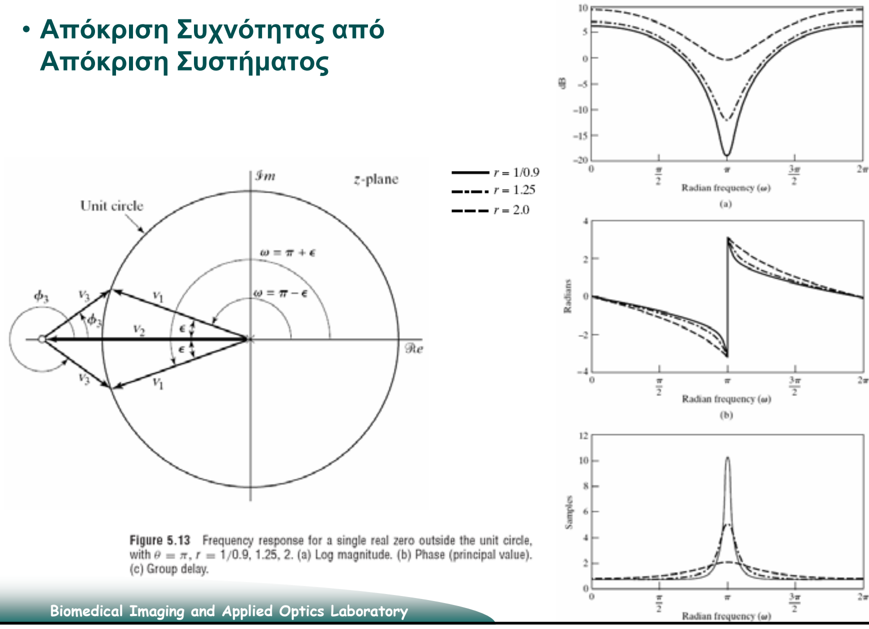


Figure 5.13 Frequency response for a single real zero outside the unit circle, with $\theta = \pi$, $r = 1/0.9, 1.25, 2$. (a) Log magnitude. (b) Phase (principal value). (c) Group delay.

Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων

• Απόκριση Συχνότητας από Απόκριση Συστήματος

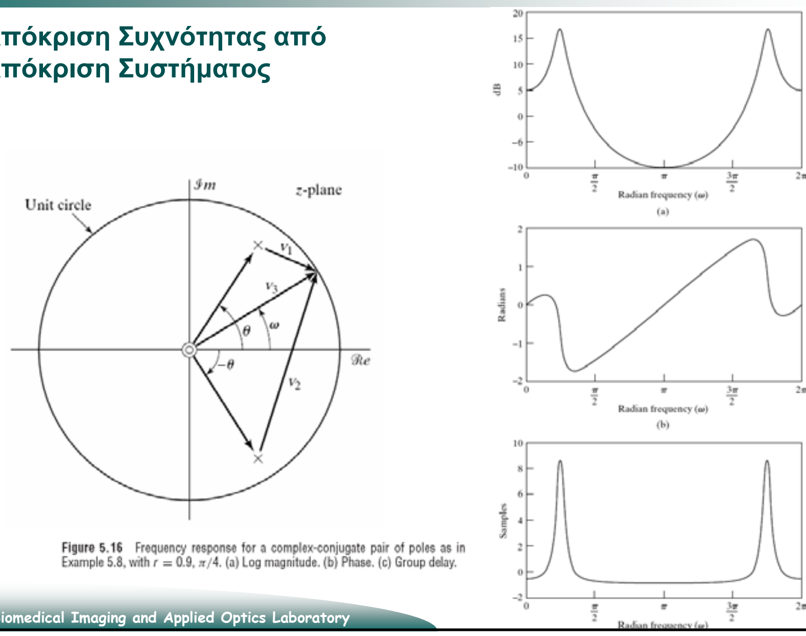


Figure 5.16 Frequency response for a complex-conjugate pair of poles as in Example 5.8, with $r = 0.9$, $\pi/4$. (a) Log magnitude. (b) Phase. (c) Group delay.

Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων

- **Σχέση Πλάτους Φάσης για Συστήματα LCCDE**

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})$$
$$= H(z)H^*(1/z^*)|_{z=e^{j\omega}}$$

$$H(z) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})}$$

$$H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-c_k^* z)}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k^* z)}$$

- Αν μπορούμε από το πλάτος να βρούμε την απόκριση συστήματος τότε μπορούμε να βρούμε και τη φάση

$$C(z) = H(z)H^*(1/z^*)$$
$$= \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-c_k z^{-1})(1-c_k^* z)}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})(1-d_k^* z)}$$

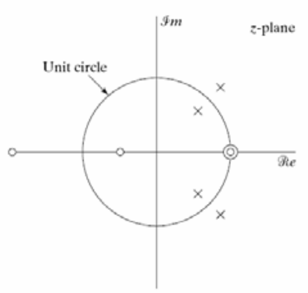
- Πόλοι: d_k and $(d_k^*)^{-1}$
- Μηδενικά: c_k and $(c_k^*)^{-1}$

- Αν το σύστημα είναι αιτιατό και σταθερό
  - Πόλοι μέσα από το μοναδιαίο κύκλο
  - Μηδενικά;

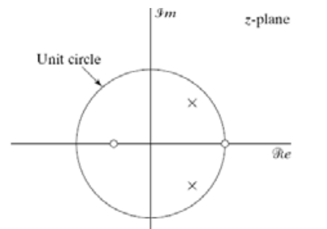
Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων

- **Σχέση Πλάτους Φάσης για Συστήματα LCCDE**

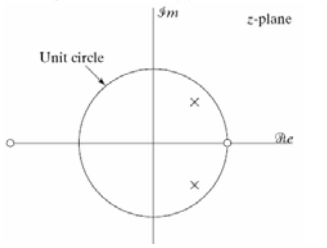
$$C(z) = H(z)H^*(1/z^*)$$



$$H_1(z) = \frac{2(1-z^{-1})(1+0.5z^{-1})}{(1-0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1-0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})}$$



$$H_2(z) = \frac{(1-z^{-1})(1+2z^{-1})}{(1-0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1-0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})}$$



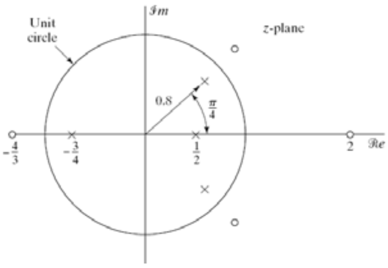
Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων

- **Συστήματα Διέλευσης (All-pass Systems)**

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}$$

$$H_{ap}(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - ae^{-j\omega}} = e^{-j\omega}\frac{1 - a^* e^{j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$|H_{ap}(e^{j\omega})| = 1$$

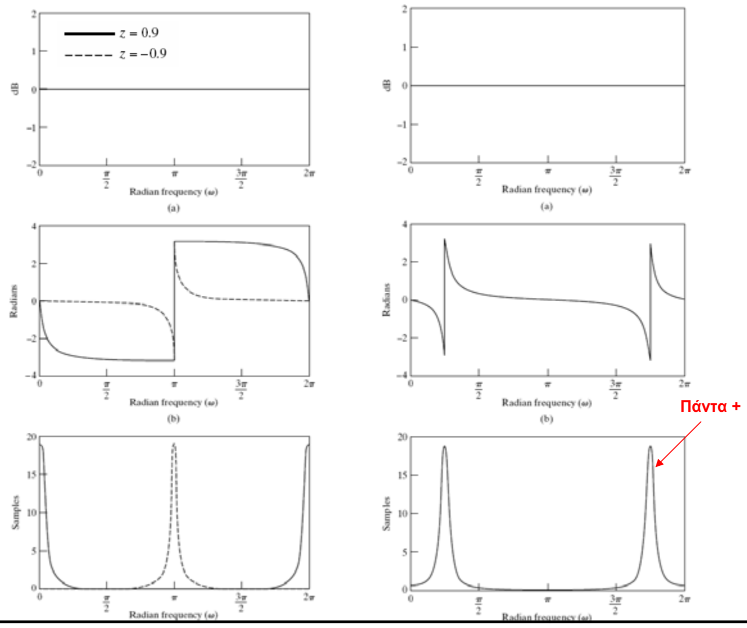


  - Ζεύγη πόλων και μηδενικών

  - Γενική Μορφή

$$H_{ap}(z) = A\prod_{k=1}^{M_r} \frac{z^{-1} - d_k}{1 - d_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{M_c} \frac{(z^{-1} - e_k^*)(z^{-1} - e_k)}{(1 - e_k z^{-1})(1 - e_k^* z^{-1})}$$

Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων



- **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης (Minimum Phase System)**
  - Ένα ΓΧΑ δεν μπορεί να καθοριστεί μόνο από το πλάτος
  - Αν είναι σταθερό και αιτιατό τότε οι πόλοι είναι μέσα στο μοναδιαίο κύκλο αλλά τα μηδενικά;
  - Αν είναι και τα μηδενικά στο μοναδιαίο κύκλο τότε έχουμε ένα σύστημα του οποίου το αντίστροφο είναι επίσης σταθερό και αιτιατό → Πολύ χρήσιμο!!!
    - Ονομάζεται Σύστημα Ελάχιστης Φάσης

- Κάθε σήμα μπορεί να αναλυθεί ως

$$H(z) = H_{\min}(z)H_{\text{ap}}(z)$$

- Π.χ. αν το H(z) έχει ένα πόλο εκτός του μοναδιαίου κύκλου στο $z = 1/c^*, |c| < 1$

$$H(z) = H_1(z)(z^{-1} - c^*)$$

$$H(z) = \underbrace{H_1(z)(1 - cz^{-1})}_{\text{Minimum Phase}}\underbrace{\frac{z^{-1} - c^*}{1 - cz^{-1}}}_{\text{All-Pass}}$$

Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων

Example 5.14 Minimum-Phase/All-Pass Decomposition

To illustrate the decomposition of a stable, causal system into the cascade of a minimum-phase and an all-pass system, consider the two stable, causal systems specified by the system functions

$$H_1(z) = \frac{(1 + 3z^{-1})}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

The first system function, $H_1(z)$, has a pole inside the unit circle at $z = -\frac{1}{2}$, but a zero outside at $z = -3$. We will need to choose the appropriate all-pass system to reflect this zero inside the unit circle. From Eq. (5.101), we have $c = -\frac{1}{3}$. Therefore, from Eqs. (5.102) and (5.103), the all-pass component will be

$$H_{\text{ap}}(z) = \frac{z^{-1} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}},$$

and the minimum-phase component will be

$$H_{\min}(z) = 3\frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}};$$

i.e.,

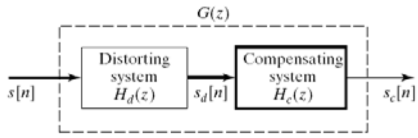
$$H_1(z) = \left(3\frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}\right)\left(\frac{z^{-1} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}\right).$$

$$H(z) = H_1(z)(z^{-1} - c^*)$$

$$H(z) = \underbrace{H_1(z)(1 - cz^{-1})}_{\text{Minimum Phase}}\underbrace{\frac{z^{-1} - c^*}{1 - cz^{-1}}}_{\text{All-Pass}}$$

Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων

- **Αντιστάθμιση (compensation) της απόκρισης συχνότητας**
  - Αφαίρεση αλλοίωσης
  - Όταν το σύστημα $H_d(z)$ δεν είναι αντιστρέψιμο;
  - Χρησιμοποιούμε σύστημα ελάχιστης φάσης
    - Αποκατάσταση του πλάτους
    - Φάση αλλοιωμένη κατά το αντίστοιχο σύστημα διέλευσης



$$H_c(z) = \frac{1}{H_d(z)}$$

$$s_c[n] = s[n].$$

$$H_d(z) = H_{d\,\min}(z) H_{\text{ap}}(z).$$

$$H_c(z) = \frac{1}{H_{d\,\min}(z)}$$

$$G(z) = H_d(z) H_c(z) = H_{\text{ap}}(z)$$

Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων

- **Ιδιότητες Συστημάτων Ελάχιστης Φάσης (Minimum Phase System)**
  - Ελάχιστη υστέρηση φάσης (minimum phase lag)
    - Προσθήκη H_{ap} → πρόσθετη αρνητική φάση $0 \le \omega \le \pi$
  - Ελάχιστη ομαδική καθυστέρηση (minimum group delay)
    - Προσθήκη H_{ap} → πρόσθετη θετικής (πάντα) GD
  - Ελάχιστη καθυστέρηση ενέργειας (minimum energy delay)

$$H(z) = H_{\min}(z) H_{\text{ap}}(z)$$

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg[H_{\min}(e^{j\omega})] + \arg[H_{\text{ap}}(e^{j\omega})].$$

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \text{grd}[H_{\min}(e^{j\omega})] + \text{grd}[H_{\text{ap}}(e^{j\omega})]$$

Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων

- **Γραμμικά συστήματα με γενική γραμμική φάση (generalized linear phase)**
  - Γραμμική φάση → απλή μετατόπιση στο χρόνο
  - Ιδανικό βαθυπερατό (lowpass) φίλτρο με γραμμική φάση

$$H_{id}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\alpha}, \qquad |\omega| < \pi,$$
$$|H_{id}(e^{j\omega})| = 1,$$
$$\sphericalangle H_{id}(e^{j\omega}) = -\omega\alpha,$$
$$\mathrm{grd}[H_{id}(e^{j\omega})] = \alpha.$$
$$h_{id}[n] = \frac{\sin \pi(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)}, \qquad -\infty < n < \infty$$
$$\alpha = n_d,$$
$$h_{id}[n] = \delta[n - n_d]$$
$$y[n] = x[n] * \delta[n - n_d] = x[n - n_d].$$

- Γενική γραμμική φάση

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega + j\beta}$$

  - α και β σταθερές
  - $A(e^{j\omega})$ πραγματικό

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \beta - \omega\alpha, \qquad 0 < \omega < \pi$$
$$\tau(\omega) = \mathrm{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega}\{\arg[H(e^{j\omega})]\} = \alpha$$

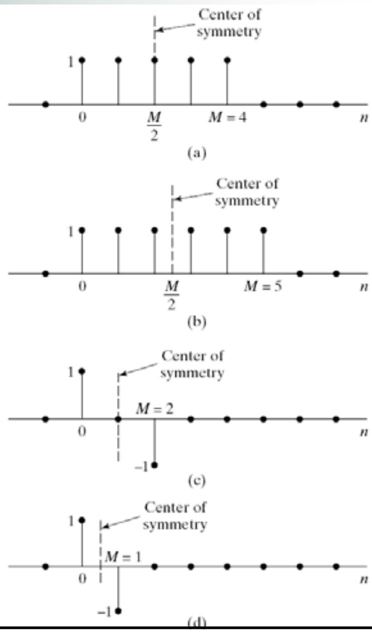
Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων

- **Γραμμικά συστήματα με γενική γραμμική φάση (generalized linear phase)**
  - Αιτιατά Συστήματα

$$h[n] = 0, \qquad n < 0$$

$$h[n] = \begin{cases} h[M-n], & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$
$$H(e^{j\omega}) = A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}$$

$$h[n] = \begin{cases} -h[M-n], & 0 \le n \le M, \\ 0. & \text{otherwise.} \end{cases}$$
$$H(e^{j\omega}) = j\,A_o(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2} = A_o(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2 + j\pi/2}$$



Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων

- Γραμμικά συστήματα με γενική γραμμική φάση (generalized linear phase)
  - Τύπου Ι
    - M even, h[n] = h[M-n]

Example 5.17 Type I Linear-Phase System

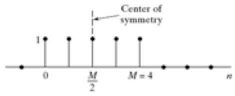
If the impulse response is

$$h[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 4, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

as shown in Figure 5.36(a), the system satisfies the condition of Eq. (5.148). The frequency response is

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{4} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega 5}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{-j\omega 2}\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}. \qquad (5.156)$$

The magnitude, phase, and group delay of the system are shown in Figure 5.37. Since $M = 4$ is even, the group delay is an integer, i.e., $\alpha = 2$.



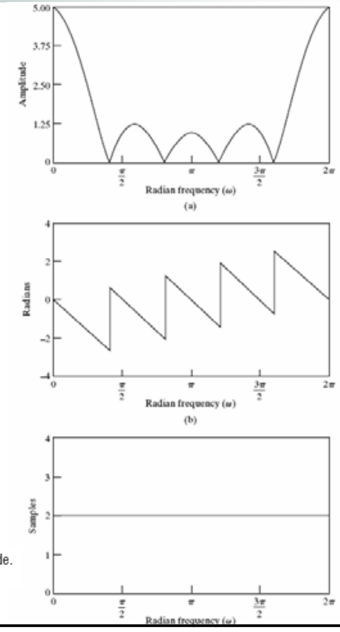


Figure 5.37 Frequency response of type I system of Example 5.17. (a) Magnitude. (b) Phase. (c) Group delay.

Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων

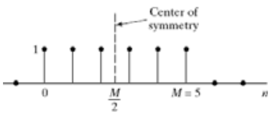
- Γραμμικά συστήματα με γενική γραμμική φάση (generalized linear phase)
  - Τύπου ΙΙ
    - M odd, h[n] - h[M-n]

Example 5.18 Type II Linear-Phase System

If the length of the impulse response of the previous example is extended by one sample, we obtain the impulse response of Figure 5.36(b), which has frequency response

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega 5/2}\frac{\sin(3\omega)}{\sin(\omega/2)}. \qquad (5.157)$$

The frequency-response functions for this system are shown in Figure 5.38. Note that the group delay in this case is constant with $\alpha = 5/2$.



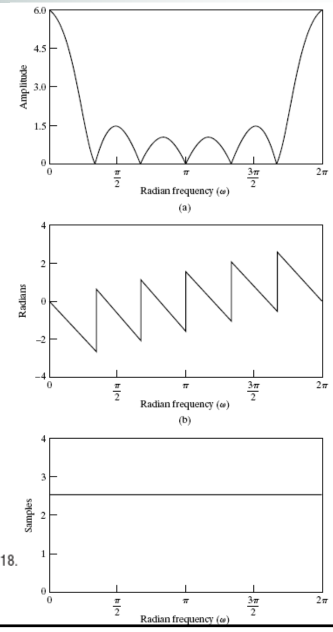


Figure 5.38 Frequency response of type II system of Example 5.18. (a) Magnitude. (b) Phase. (c) Group delay.

Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων

- **Γραμμικά συστήματα με γενική γραμμική φάση (generalized linear phase)**
  - Τύπου III
    - M even, h[n] = -h[M-n]

Example 5.19 Type III Linear-Phase System

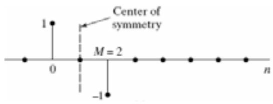
If the impulse response is

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-2], \quad (5.158)$$

as in Figure 5.36(c), then

$$H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j2\omega} = j[2\sin(\omega)]e^{-j\omega}. \quad (5.159)$$

The frequency-response plots for this example are given in Figure 5.39. Note that the group delay in this case is constant with $\alpha = 1$.



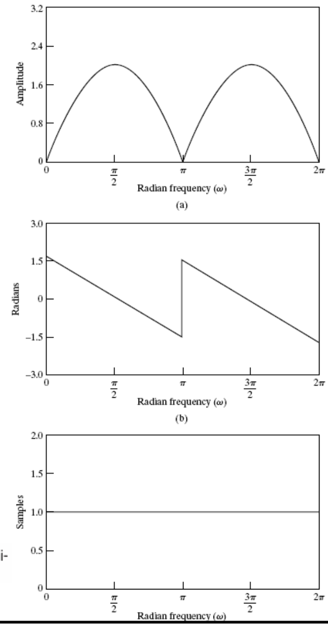


Figure 5.39 Frequency response of type III system of Example 5.19. (a) Magnitude. (b) Phase. (c) Group delay.

Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων

- **Γραμμικά συστήματα με γενική γραμμική φάση (generalized linear phase)**
  - Τύπου IV
    - M odd, h[n] = -h[M-n]

Example 5.20 Type IV Linear-Phase System

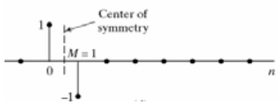
In this case (Figure 5.36(d)), the impulse response is

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1], \quad (5.160)$$

for which the frequency response is

$$H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega} = j[2\sin(\omega/2)]e^{-j\omega/2}. \quad (5.161)$$

The frequency response for this system is shown in Figure 5.40. Note that the group delay is equal to $\frac{1}{2}$ for all ω.



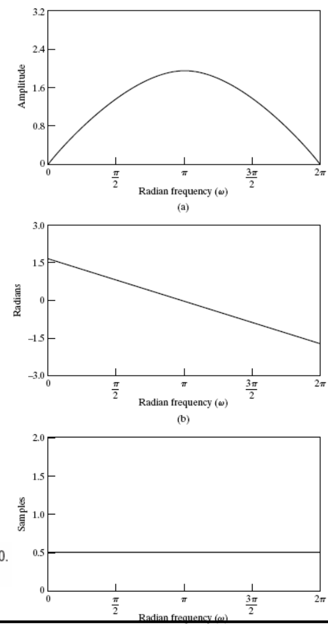


Figure 5.40 Frequency response of type IV system of Example 5.20. (a) Magnitude. (b) Phase. (c) Group delay.