



Διαλέξεις 13 & 14

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

(Κεφ. 8.0-8.7)



- **Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (discrete-time Fourier transform – DTFT)**

- Χρήσιμο θεωρητικό εργαλείο
- Δύσκολος υπολογισμός με ψηφιακά μέσα (δηλ. υπολογιστές)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- Το άθροισμα είναι άπειρο
- Η συχνότητα ω είναι συνεχής

- **Διακριτός μετασχηματισμός Fourier (discrete Fourier transform – DFT)**

- Διακριτή σειρά
- Δείγματα του DTFT
- Σήματα με περιορισμένη χρονική διάρκεια ή που μας ενδιαφέρει μόνο περιορισμένο μέρος

- **Αρχίζουμε την ανάλυση με διακριτές σειρές Fourier (discrete Fourier Series – DFS)**



- Διακριτές Σειρές Fourier

- Περιοδική σειρά με περίοδο N

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n + rN]$$

- Μπορεί να αναπαρασταθεί με μια σειρά Fourier (δηλ. άθροισμα μιγαδικών εκθετικών)

- Συχνότητες: ακέραια πολλαπλάσια της $2\pi/N$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_k \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn}$$

- Χρειάζονται μόνο N μοναδικά αρμονικά εκθετικά (αφού τα εκθετικά είναι περιοδικά με περίοδο N)

$$e^{j(2\pi/N)(k+mN)n} = e^{j(2\pi/N)kn} e^{j2\pi mn} = e^{j(2\pi/N)kn}$$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn}$$

- Διακριτές Σειρές Fourier

- Οι συντελεστές της διακριτής σειράς Fourier

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn}$$

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn}$$

- Η σειρά των συντελεστών είναι περιοδική με περίοδο N

$$\tilde{X}[k+N] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)(k+N)n} = \tilde{X}[k]$$

- Για ευκολία καθορίζουμε δύο εξισώσεις

$$W_N = e^{-j(2\pi/N)}$$

- Σύνθεση

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn}$$

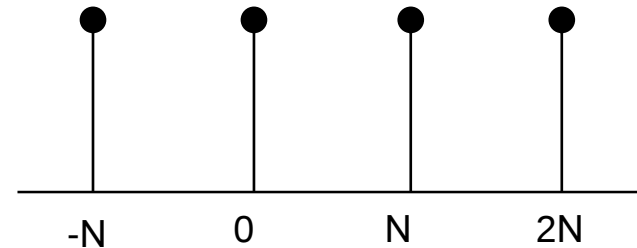
- Ανάλυση

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn}$$

- Παράδειγμα: Σειρά κρουστικών (impulse train)

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN]$$

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] W_N^{kn} = W_N^0 = 1$$



$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)kn}$$

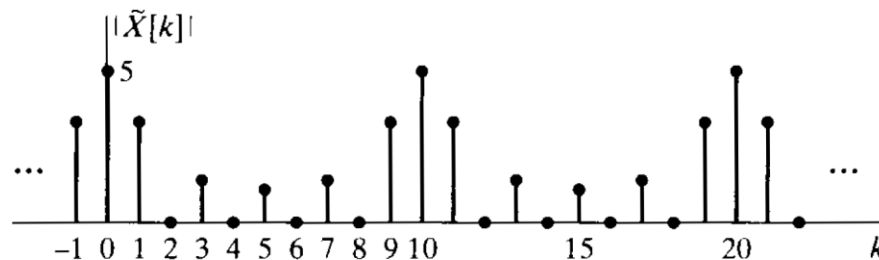
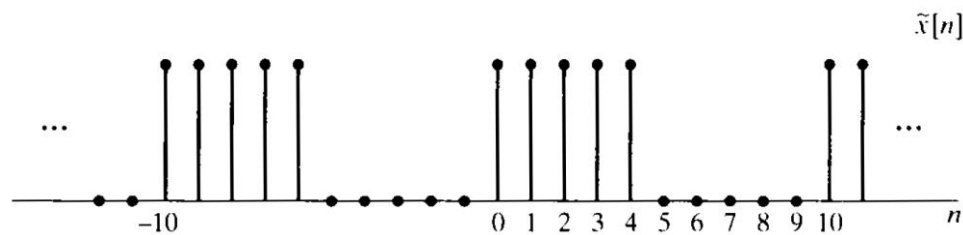
- Άθροισμα N εκθετικών
 - Ίσο πλάτος και φάση
 - Άθροισμα = 1 στις κρουστικές, 0 αλλού

- Παράδειγμα: Περιοδικός Τετραγωνικός Παλμός (periodic rectangular pulse train)

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn}$$

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^4 W_{10}^{kn} = \sum_{n=0}^4 e^{-j(2\pi/10)kn}$$

$$\tilde{X}[k] = \frac{1 - W_{10}^{5k}}{1 - W_{10}^k} = e^{-j(4\pi k/10)} \frac{\sin(\pi k/2)}{\sin(\pi k/10)}$$



(a)

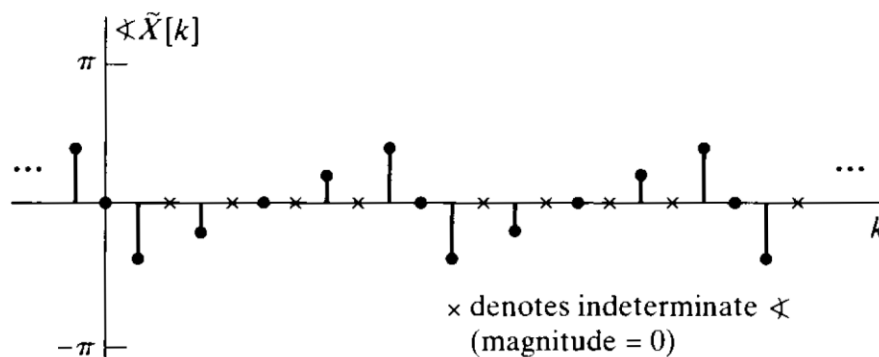


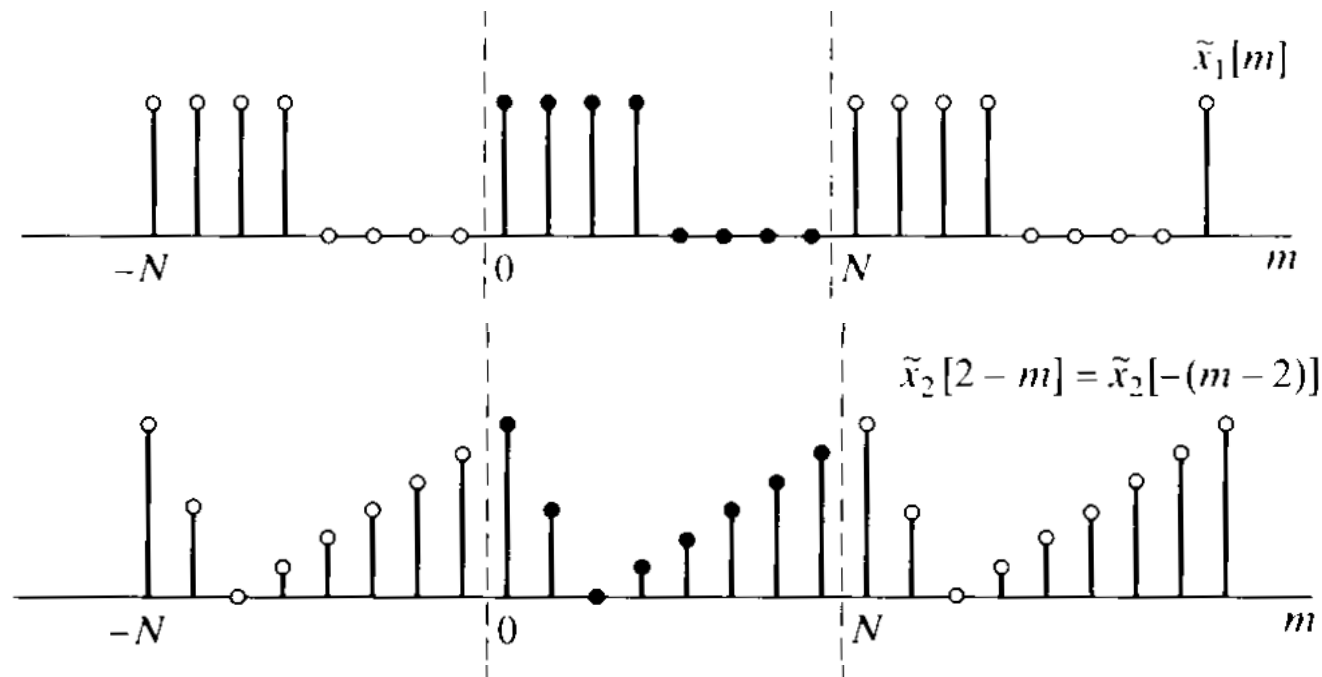
TABLE 8.1 SUMMARY OF PROPERTIES OF THE DFS

Periodic Sequence (Period N)	DFS Coefficients (Period N)
1. $\tilde{x}[n]$	$\tilde{X}[k]$ periodic with period N
2. $\tilde{x}_1[n], \tilde{x}_2[n]$	$\tilde{X}_1[k], \tilde{X}_2[k]$ periodic with period N
3. $a\tilde{x}_1[n] + b\tilde{x}_2[n]$	$a\tilde{X}_1[k] + b\tilde{X}_2[k]$
4. $\tilde{X}[n]$	$N\tilde{x}[-k]$
5. $\tilde{x}[n - m]$	$W_N^{km} \tilde{X}[k]$
6. $W_N^{-\ell n} \tilde{x}[n]$	$\tilde{X}[k - \ell]$
7. $\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \tilde{x}_2[n - m]$ (periodic convolution)	$\tilde{X}_1[k] \tilde{X}_2[k]$
8. $\tilde{x}_1[n] \tilde{x}_2[n]$	$\frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{X}_1[\ell] \tilde{X}_2[k - \ell]$ (periodic convolution)
9. $\tilde{x}^*[n]$	$\tilde{X}^*[-k]$

TABLE 8.1 (Continued)

Periodic Sequence (Period N)	DFS Coefficients (Period N)
10. $\tilde{x}^*[-n]$	$\tilde{X}^*[k]$
11. $\mathcal{Re}\{\tilde{x}[n]\}$	$\tilde{X}_e[k] = \frac{1}{2}(\tilde{X}[k] + \tilde{X}^*[-k])$
12. $j\mathcal{Im}\{\tilde{x}[n]\}$	$\tilde{X}_o[k] = \frac{1}{2}(\tilde{X}[k] - \tilde{X}^*[-k])$
13. $\tilde{x}_e[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] + \tilde{x}^*[-n])$	$\mathcal{Re}\{\tilde{X}[k]\}$
14. $\tilde{x}_o[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] - \tilde{x}^*[-n])$	$j\mathcal{Im}\{\tilde{X}[k]\}$
Properties 15–17 apply only when $x[n]$ is real.	
15. Symmetry properties for $\tilde{x}[n]$ real.	$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{X}[k] = \tilde{X}^*[-k] \\ \mathcal{Re}\{\tilde{X}[k]\} = \mathcal{Re}\{\tilde{X}^*[-k]\} \\ \mathcal{Im}\{\tilde{X}[k]\} = -\mathcal{Im}\{\tilde{X}^*[-k]\} \\ \tilde{X}[k] = \tilde{X}^*[-k] \\ \angle \tilde{X}[k] = -\angle \tilde{X}^*[-k] \end{array} \right.$
16. $\tilde{x}_e[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] + \tilde{x}[-n])$	$\mathcal{Re}\{\tilde{X}[k]\}$
17. $\tilde{x}_o[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] - \tilde{x}[-n])$	$j\mathcal{Im}\{\tilde{X}[k]\}$

- Περιοδική ή Κυκλική Συνέλιξη



$$\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \tilde{x}_2[n-m] \xleftrightarrow{\mathcal{DFS}} \tilde{X}_1[k] \tilde{X}_2[k] \quad \tilde{x}_1[n] \tilde{x}_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFS}} \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{X}_1[\ell] \tilde{X}_2[k-\ell]$$



- **Μετασχηματισμός Fourier (ΜΦ) Περιοδικών Σημάτων**

- ΜΦ μιγαδικών εκθετικών

$$x[n] = \sum_k a_k e^{j\omega_k n}, \quad -\infty < n < \infty$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_k 2\pi a_k \delta(\omega - \omega_k + 2\pi r)$$

- ΜΦ περιοδικού σήματος

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn}$$

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \tilde{X}[k] \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N})$$

- Σειρά κρουστικών με πλάτος $X[k]$



- **Μετασχηματισμός Fourier Περιοδικών Σημάτων**

- ΜΦ σειράς κρουστικών (impulse train)

$$\tilde{p}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN]$$

- Συντελεστές σειράς Fourier

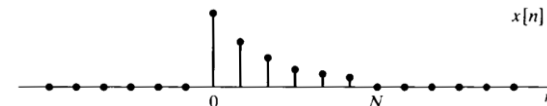
$$\tilde{P}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] W_N^{kn} = 1$$

- Μετασχηματισμός Fourier

$$\tilde{P}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N})$$

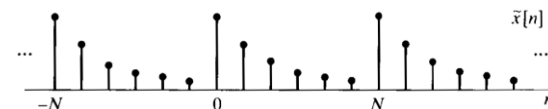
- Μετασχηματισμός Χρονικά Περιορισμένων (finite duration) Σημάτων

$$x[n] \quad (x[n] = 0 \text{ outside of } [0, N-1])$$



- Περιοδικό σήμα

$$\tilde{x}[n] = x[n] * \tilde{p}[n] = x[n] * \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(n - rN) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN]$$



$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \tilde{P}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} X(e^{j(2\pi/N)k}) \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N})$$

- όμως

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \tilde{X}[k] \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N})$$

- άρα

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j(2\pi/N)k}) = X(e^{j\omega})|_{\omega=(2\pi/N)k}$$

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Συντελεστές τις σειράς Fourier $\leftrightarrow$ Δείγματα του ΜΦ μιας περιόδου
- Είναι το $X[k]$ ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier (ΔΜΦ) του $x[n]$;**



- **Δειγματοληψία του Μετασχηματισμού Fourier**

- Για μια μη περιοδική συνάρτηση

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \leftrightarrow x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

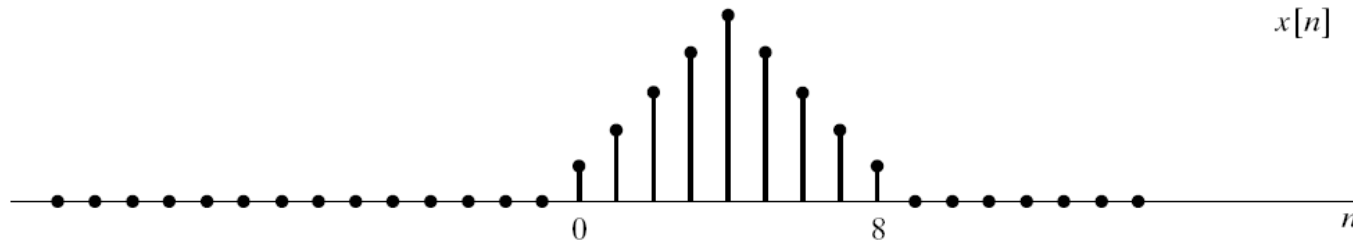
- Δειγματοληψία μετασχηματισμού

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=(2\pi/N)k} = X(e^{j(2\pi/N)k})$$

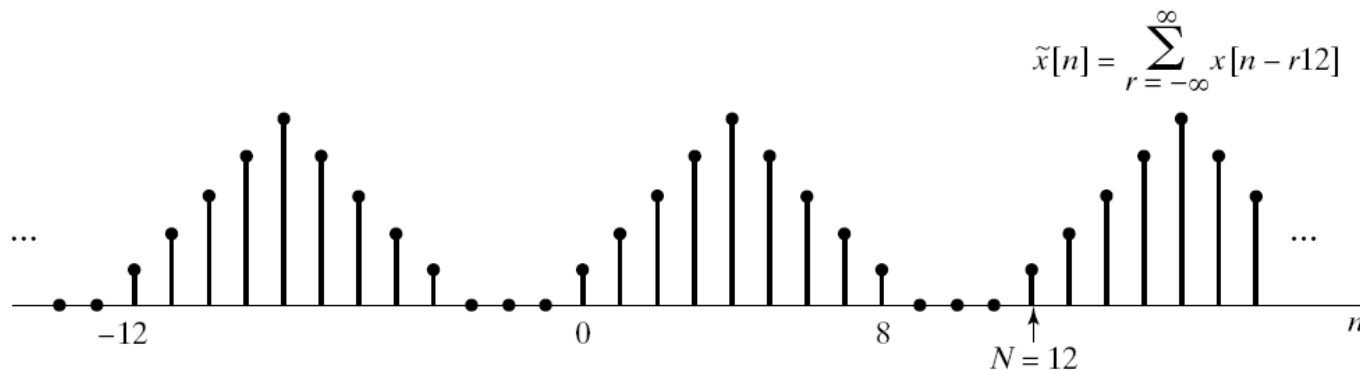
- Ποια σειρά καθορίζεται από τους συντελεστές $X[k]$;

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j(2\pi/N)km} \right] W_N^{-kn} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-k(n-m)} \right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \tilde{p}[n-m] \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN] = \tilde{x}[n] \end{aligned}$$

- Δειγματοληψία του Μετασχηματισμού Fourier
 - Παραδείγματα



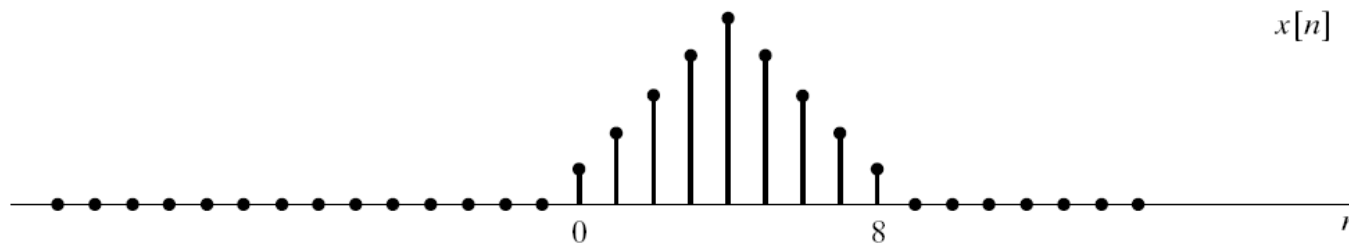
- ΔΜΦ, 12 σημεία



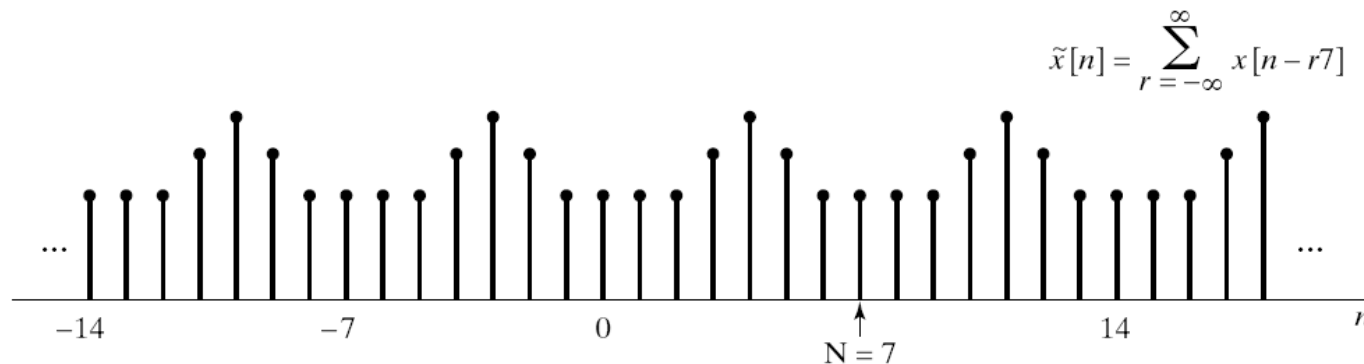
- Οι συντελεστές της σειράς Fourier είναι ο διακριτός μετασχηματισμός του μη περιοδικού σήματος

- Δειγματοληψία του Μετασχηματισμού Fourier

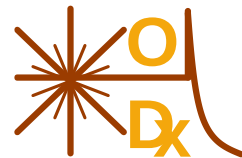
- Παραδείγματα



- ΔΜΦ, 7 σημεία



- Οι συντελεστές της σειράς Fourier είναι ο διακριτός μετασχηματισμός κάποιου άλλου μη περιοδικού σήματος!



• Δειγματοληψία του Μετασχηματισμού Fourier

- Η σχέση μεταξύ μιας περιόδου του $x[n]$ και του περιοδικού σήματος είναι μια μορφή αναδίπλωσης (aliasing) στο πεδίο του χρόνου
 - Μπορεί να αποφευχθεί αν το $x[n]$ έχει περιορισμένη χρονική διάρκεια
 - Αντίστοιχο του περιορισμένου εύρους στην αναδίπλωση στο πεδίο της συχνότητας
- Μπορούμε να ανακτήσουμε την αρχική σειρά $x[n]$ αν
 - Το αρχικό $x[n]$ έχει περιορισμένη διάρκεια
 - Ο ΔΜΦ έχει $k_{\Delta\text{ΜΦ}} \geq N_{\text{Σήματος}}$

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Δεν χρειάζεται να ξέρουμε όλες τις συχνότητες του ΜΦ για να ανακτήσουμε μια διακριτή σειρά $x[n]$!

$$x[n] \rightarrow \tilde{x}[n] \rightarrow DFS, \tilde{X}[k] \rightarrow \tilde{x}[n] \rightarrow x[n]$$



- Μετασχηματισμός Fourier

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega$$

- Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου (ΜΦΔΧ)

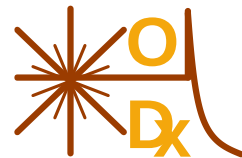
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

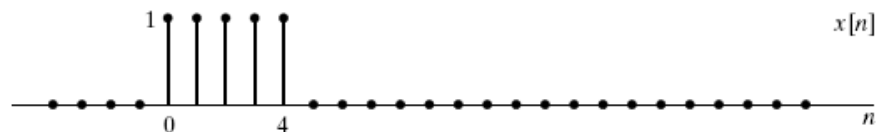
- Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (ΔΜΦ)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi/N)kn}$$

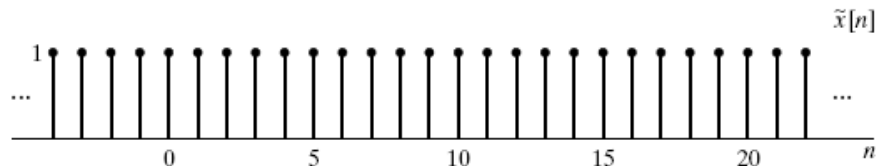
$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j(2\pi/N)kn}$$



• Παραδείγματα

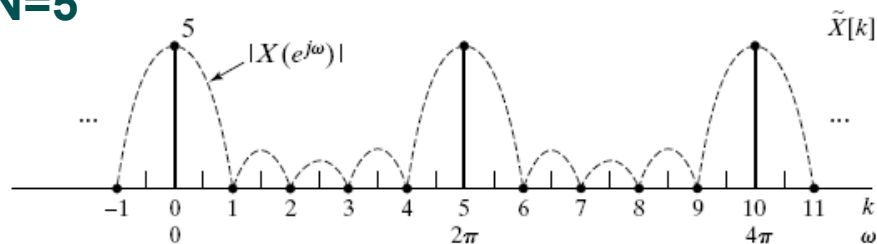


(a)

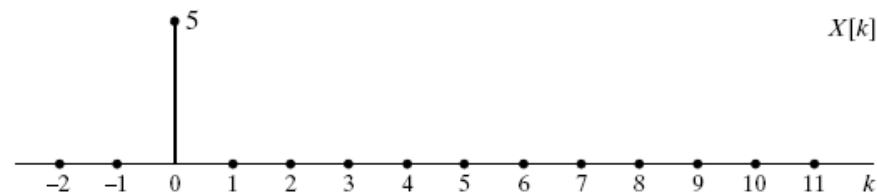


(b)

N=5

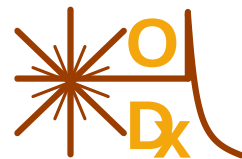


(c)



(d)

Figure 8.10 Illustration of the DFT. (a) Finite-length sequence $x[n]$. (b) Periodic sequence $\tilde{x}[n]$ formed from $x[n]$ with period $N = 5$. (c) Fourier series coefficients $\tilde{X}[k]$ for $\tilde{x}[n]$. To emphasize that the Fourier series coefficients are samples of the Fourier transform, $|X(e^{j\omega})|$ is also shown. (d) DFT of $x[n]$.



• Παραδείγματα

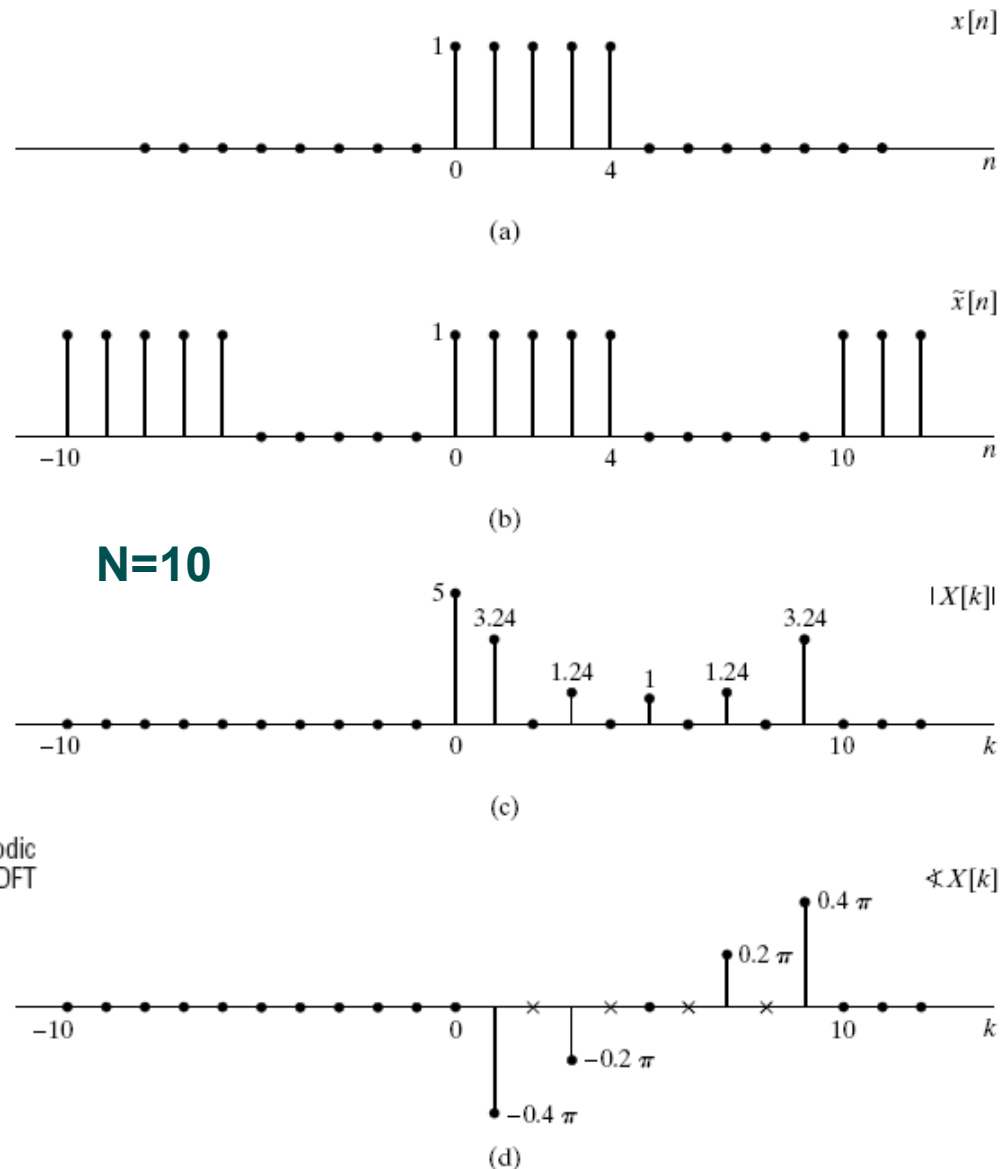


Figure 8.11 Illustration of the DFT. (a) Finite-length sequence $x[n]$. (b) Periodic sequence $\tilde{x}[n]$ formed from $x[n]$ with period $N = 10$. (c) DFT magnitude. (d) DFT phase. (x's indicate indeterminate values.)

• Ιδιότητες του ΔΜΦ

• Γραμμικότητα

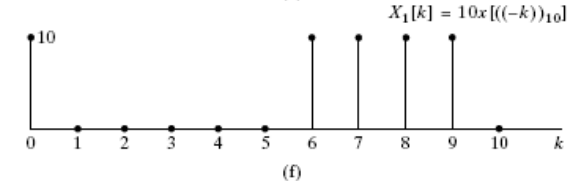
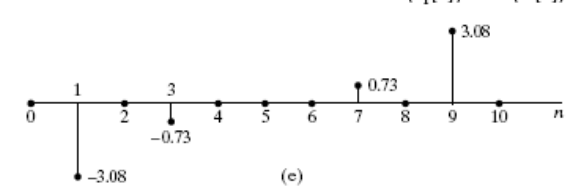
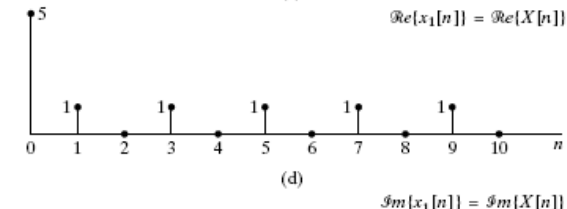
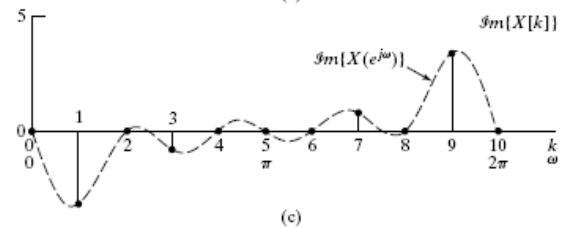
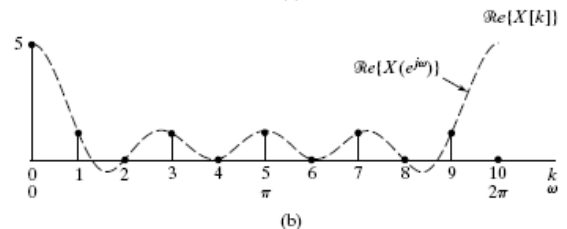
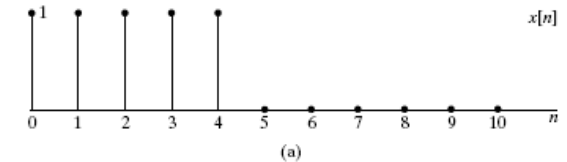
$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{DFT} aX_1[k] + bX_2[k]$$

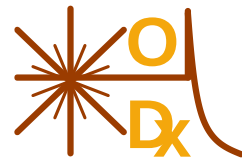
• Δυσικότητα (duality)

$$x[n] \xleftrightarrow{DFT} X[k]$$

$$X[n] \xleftrightarrow{DFT} Nx[((-k))_N], \quad 0 \leq k \leq N-1$$

Figure 8.13 Illustration of duality.
 (a) Real finite-length sequence $x[n]$.
 (b) and (c) Real and imaginary parts of corresponding DFT $X[k]$.
 (d) and (e) The real and imaginary parts of the dual sequence $x_1[n] = X[n]$.
 (f) The DFT of $x_1[n]$.





- **Ιδιότητες του ΔΜΦ**

- Κυκλική μετατόπιση (circular shift)

$$x[n] \xleftrightarrow{DFT} X[k]$$

$$x_1[n] \xleftrightarrow{DFT} X_1[k] = e^{-j(2\pi k/N)m} X[k]$$

$$x_1[n] = \begin{cases} \tilde{x}_1[n] = \tilde{x}[n-m] = x[((n-m))_N], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- **Ιδιότητες του ΔΜΦ**

- Κυκλική μετατόπιση (circular shift)

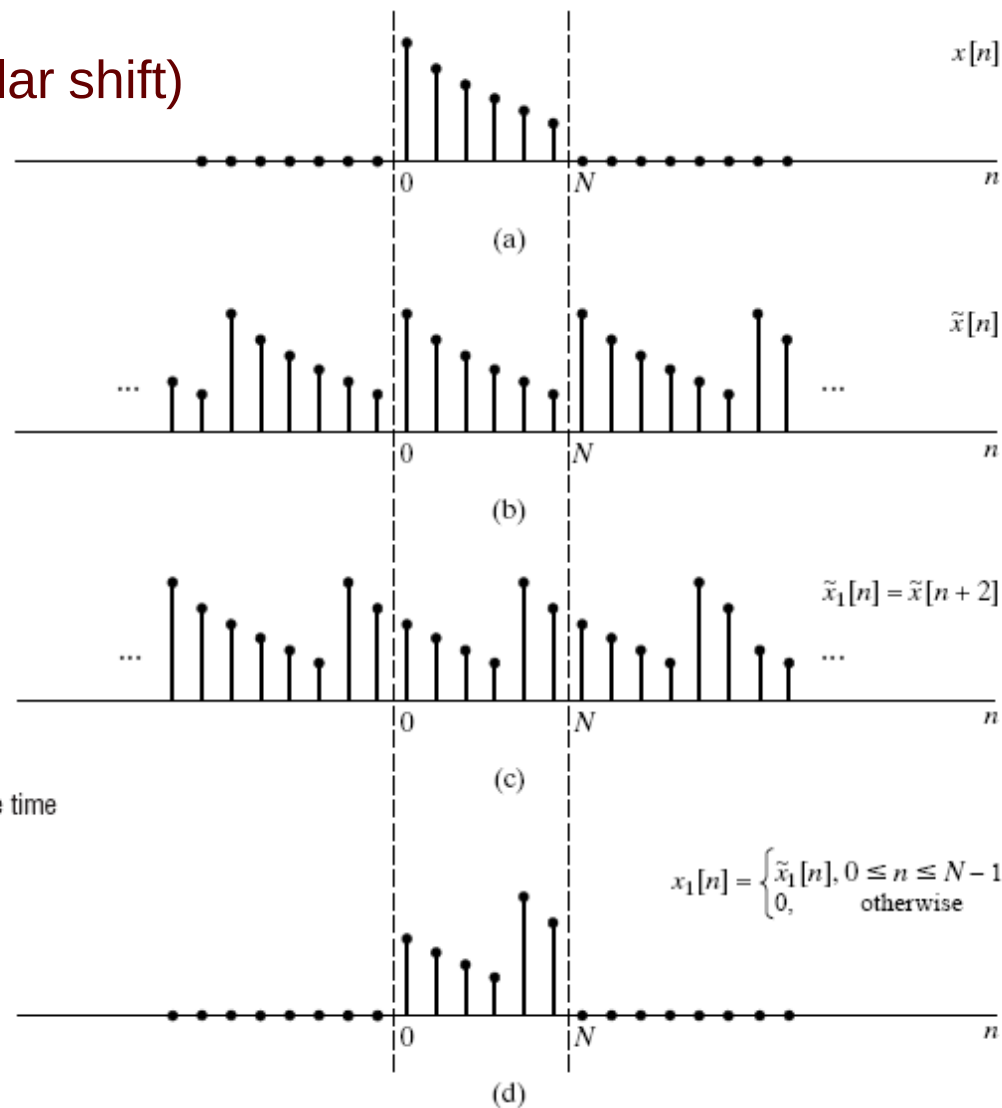
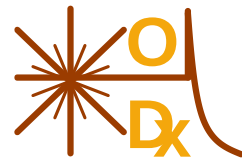


Figure 8.12 Circular shift of a finite-length sequence; i.e., the effect in the time domain of multiplying the DFT of the sequence by a linear phase factor.



- **Ιδιότητες του ΔΜΦ**

- Κυκλική συνέλιξη (circular convolution)

$$\begin{aligned}x_3[n] &= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \tilde{x}_2[n-m], \quad 0 \leq n \leq N-1 \\&= \sum_{m=0}^{N-1} x_1[((m))_N] x_2[((n-m))_N], \quad 0 \leq n \leq N-1 \\&= \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2[((n-m))_N], \quad 0 \leq n \leq N-1\end{aligned}$$

$$x_3[n] = x_1[n] \textcircled{N} x_2[n]$$

• Ιδιότητες του ΔΜΦ

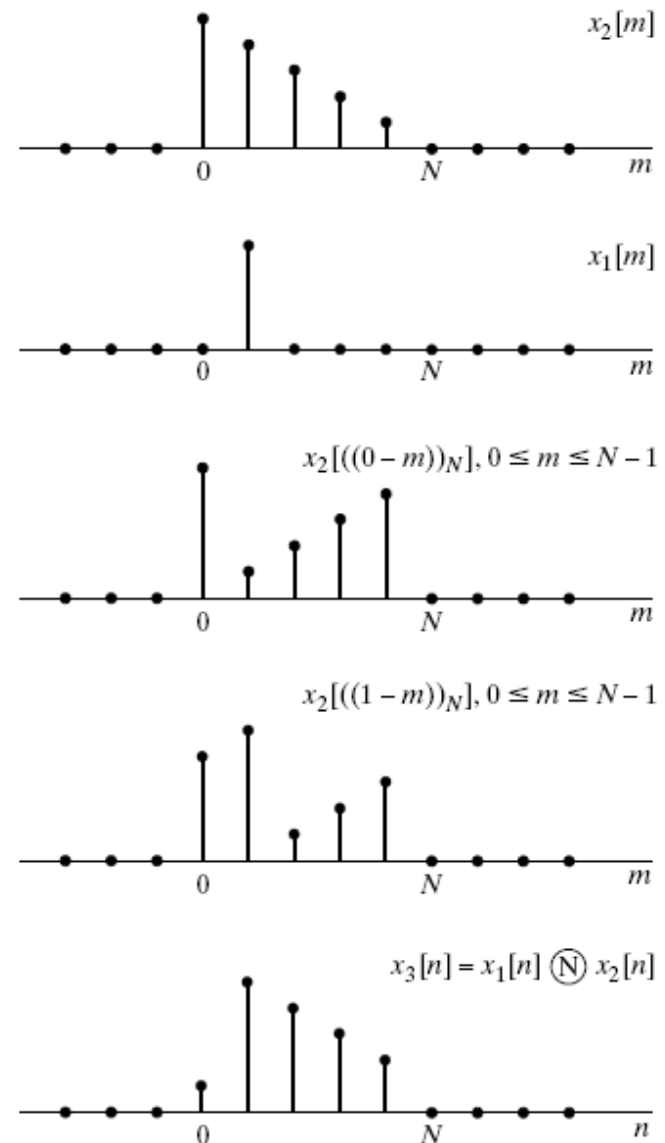
- Κυκλική συνέλιξη (circular convolution)

$$x_1[n] = \delta[n - n_0]$$

$$X_1[k] = W_N^{kn_0}$$

$$X_3[k] = W_N^{kn_0} X_2[k]$$

Figure 8.14 Circular convolution of a finite-length sequence $x_2[n]$ with a single delayed impulse, $x_1[n] = \delta[n - 1]$.



• Ιδιότητες του ΔΜΦ

- Κυκλική συνέλιξη με ΔΜΦ

$$X_3[k] = X_1[k]X_2[k] \text{ for } 0 \leq k \leq N-1$$

inverse DFT of $X_3[k]$

$$x_3[n] = x_1[n] \circledast x_2[n]$$

- Γραμμική συνέλιξη με ΔΜΦ;

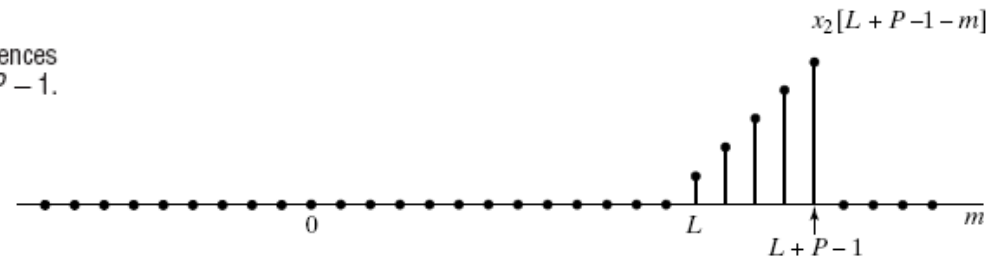
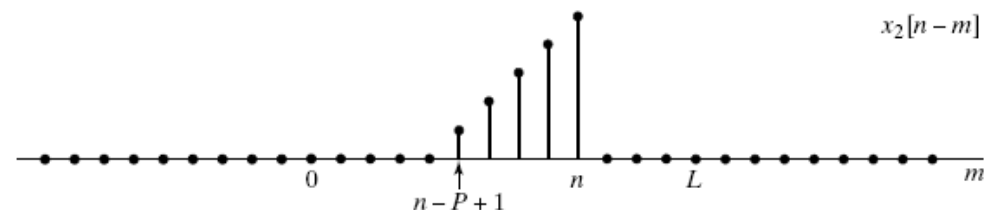
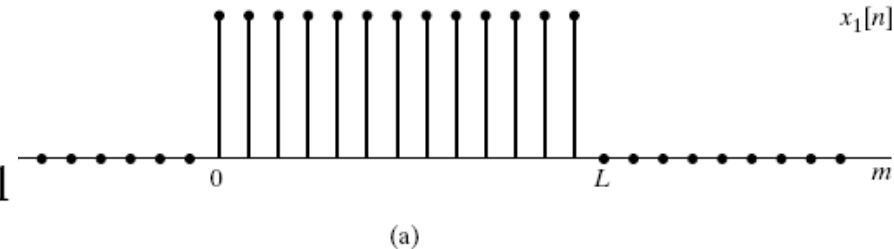


Figure 8.17 Example of linear convolution of two finite-length sequences showing that the result is such that $x_3[n] = 0$ for $n \leq -1$ and for $n \geq L + P - 1$.
 (a) Finite-length sequence $x_1[n]$. (b) $x_2[n - m]$ for several values of n .

- Ιδιότητες του ΔΜΦ

- Γραμμική συνέλιξη με ΔΜΦ;

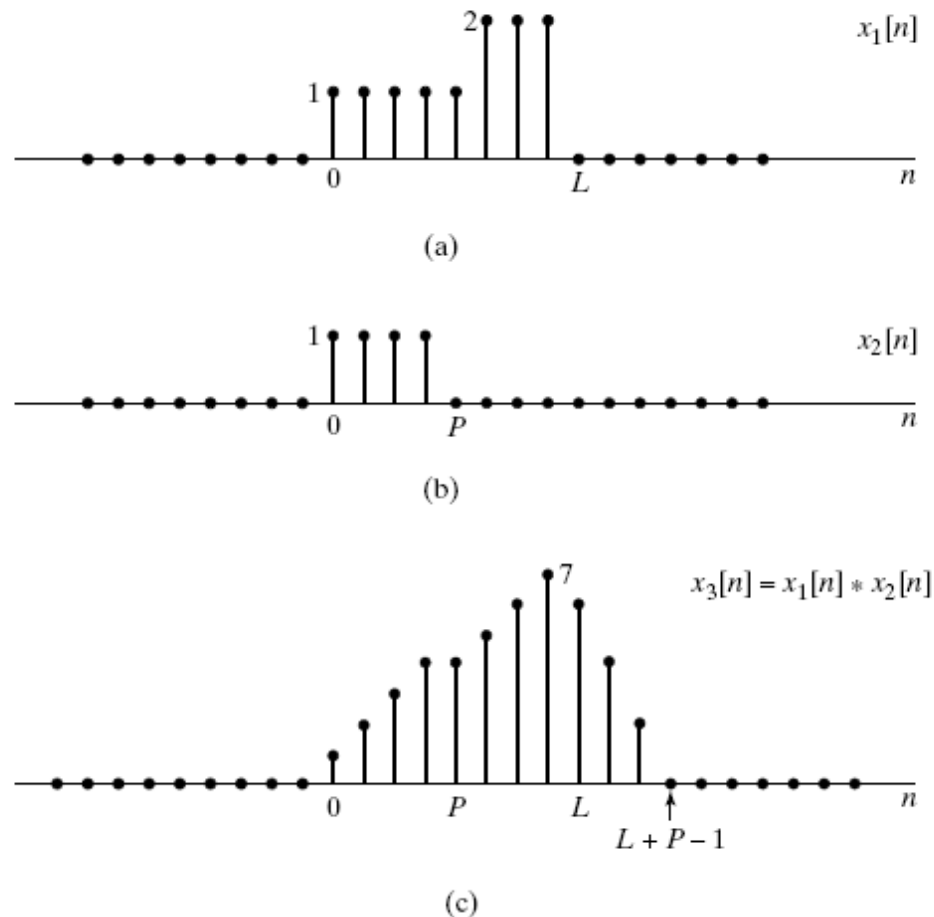
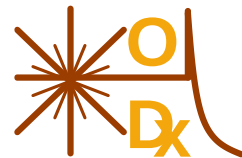


Figure 8.19 An example of linear convolution of two finite-length sequences.



• Ιδιότητες του ΔΜΦ

- Γραμμική συνέλιξη με ΔΜΦ;

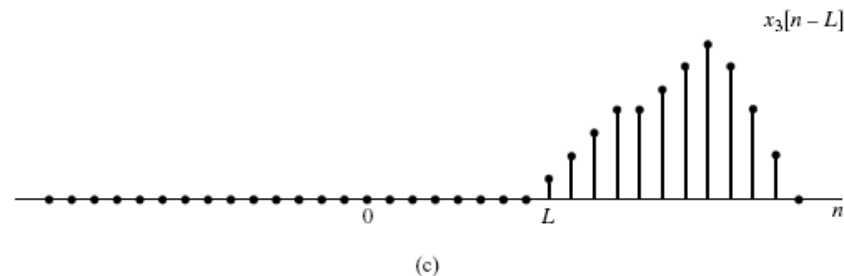
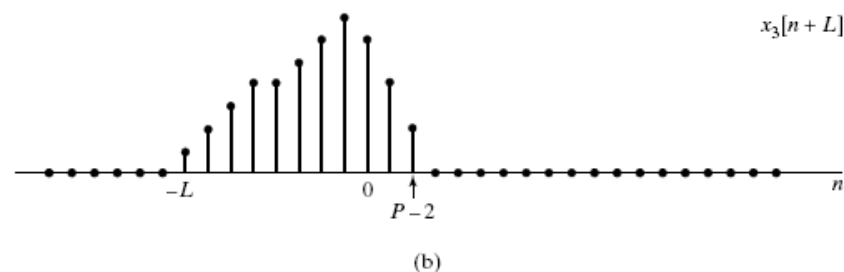
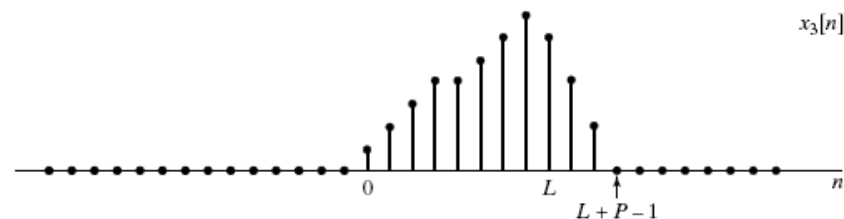
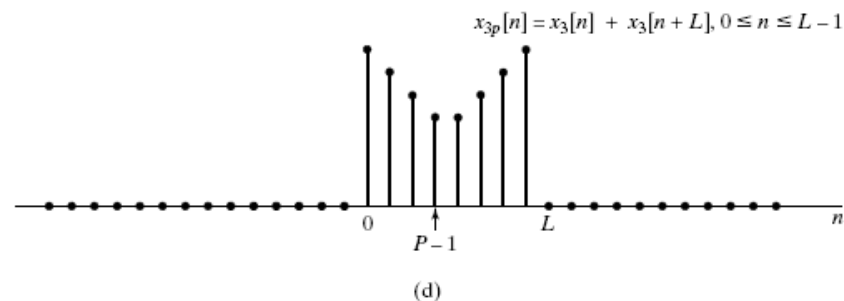


Figure 8.20 Interpretation of circular convolution as linear convolution followed by aliasing for the circular convolution of the two sequences $x_1[n]$ and $x_2[n]$ in Figure 8.19.



• Ιδιότητες του ΔΜΦ

- Γραμμική συνέλιξη με ΔΜΦ;

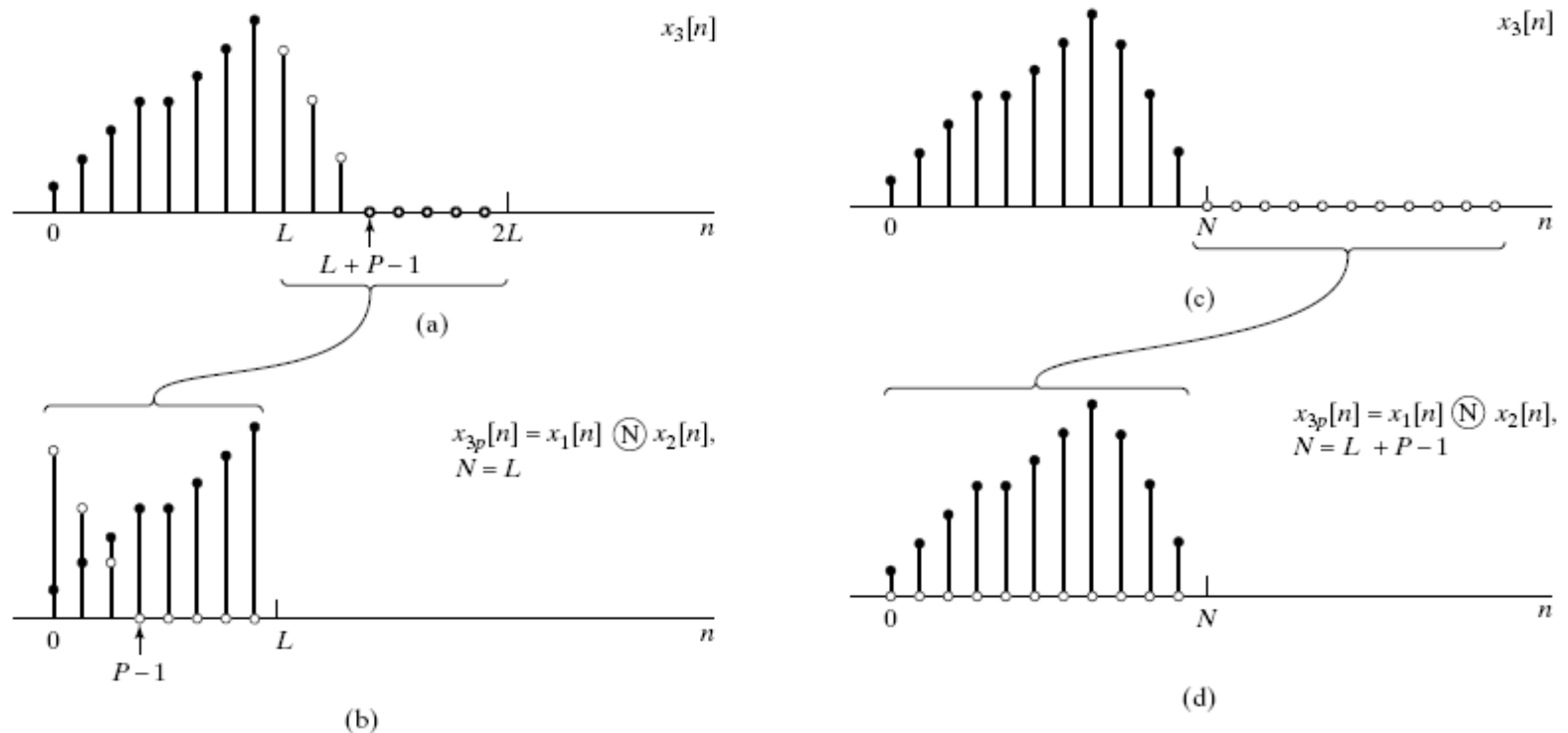
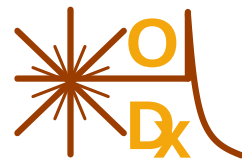


Figure 8.21 Illustration of how the result of a circular convolution “wraps around.” (a) and (b) $N = L$, so the aliased “tail” overlaps the first $(P - 1)$ points. (c) and (d) $N = (L + P - 1)$, so no overlap occurs.



• Ιδιότητες του ΔΜΦ

Finite-Length Sequence (Length N)	N -point DFT (Length N)
1. $x[n]$	$X[k]$
2. $x_1[n], x_2[n]$	$X_1[k], X_2[k]$
3. $ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1[k] + bX_2[k]$
4. $X[n]$	$Nx[((-k))_N]$
5. $x[((n-m))_N]$	$W_N^{km} X[k]$
6. $W_N^{-\ell n} x[n]$	$X[((k-\ell))_N]$
7. $\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2[((n-m))_N]$	$X_1[k]X_2[k]$
8. $x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} X_1(\ell)X_2[((k-\ell))_N]$
9. $x^*[n]$	$X^*[((-k))_N]$
10. $x^*[((-n))_N]$	$X^*[k]$
11. $\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$X_{\text{ep}}[k] = \frac{1}{2}\{X[((k))_N] + X^*[((-k))_N]\}$
12. $j\mathcal{I}m\{x[n]\}$	$X_{\text{op}}[k] = \frac{1}{2}\{X[((k))_N] - X^*[((-k))_N]\}$
13. $x_{\text{ep}}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x^*[((-n))_N]\}$	$\mathcal{R}e\{X[k]\}$
14. $x_{\text{op}}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x^*[((-n))_N]\}$	$j\mathcal{I}m\{X[k]\}$
Properties 15–17 apply only when $x[n]$ is real.	
15. Symmetry properties	$\begin{cases} X[k] = X^*[((-k))_N] \\ \mathcal{R}e\{X[k]\} = \mathcal{R}e\{X^*[((-k))_N]\} \\ \mathcal{I}m\{X[k]\} = -\mathcal{I}m\{X^*[((-k))_N]\} \\ X[k] = X^*[((-k))_N] \\ \angle\{X[k]\} = -\angle\{X^*[((-k))_N]\} \end{cases}$
16. $x_{\text{ep}}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x^*[((-n))_N]\}$	$\mathcal{R}e\{X[k]\}$
17. $x_{\text{op}}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x^*[((-n))_N]\}$	$j\mathcal{I}m\{X[k]\}$