



Διάλεξεις 15 & 16

FFT και Ανάλυση με FFT

(Κεφ. 9.0-9.5, 10.0-10.2)

- **Ο ΔΜΦ**

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

- **Ο αντίστροφος ΔΜΦ**

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

- Θα επικεντρωθούμε στο ΔΜΦ αλλά όλα ισχύουν και για τον αντίστροφο ΔΜΦ
- Ο αριθμός πολλαπλασιασμών και προσθέσεων θα χρησιμοποιείται ως μέτρο του υπολογιστικού χρόνου του μετασχηματισμού
- Ο Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier (FFT) δεν είναι άλλος μετασχηματισμός, απλά ένας γρήγορος αλγόριθμος

• Ευθύς υπολογισμός του ΔΜΦ

- Υπολογίζουμε μια φορά το

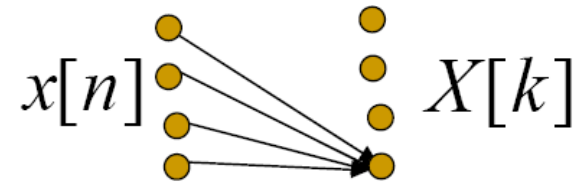
$$W_N^k = e^{-j(2\pi/N)k}$$

$$= \cos(2\pi k / N) + j \sin(2\pi k / N), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

- Μετά υπολογίσουμε για κάθε k

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

- Για κάθε k χρειάζονται
 - N μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί
 - N-1 μιγαδικές προσθέσεις
- Για όλα τα k (N σύνολο) χρειάζονται
 - N² μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί
 - N(N-1) μιγαδικές προσθέσεις



- **Ευθύς υπολογισμός του ΔΜΦ**

- Για μιγαδικά $x[n]$ και W

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} [(\operatorname{Re}\{x[n]\} \operatorname{Re}\{W_N^{kn}\} - (\operatorname{Im}\{x[n]\} \operatorname{Im}\{W_N^{kn}\})) + j(\operatorname{Re}\{x[n]\} \operatorname{Im}\{W_N^{kn}\} + \operatorname{Im}\{x[n]\} \operatorname{Re}\{W_N^{kn}\})], \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

- Για κάθε μιγαδικό πολλαπλασιασμό
 - 4 πραγματικούς πολλαπλασιασμούς και 2 πραγματικές προσθέσεις
- Για κάθε μιγαδική πρόσθεση
 - 2 πραγματικές προσθέσεις
- Για όλο τον ΔΜΦ χρειάζονται
 - $4N^2$ μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί
 - $N(4N-2)$ μιγαδικές προσθέσεις
 - Ανάλογος N^2
 - Μπορούμε να μειώσουμε τις πράξεις αν εκμεταλλευτούμε τη συμμετρία και την περιοδικότητα του W

• Ιδιότητες του W

$$W_N = e^{-j(2\pi/N)}$$

- Μιγαδική Συζυγής Συμετρία

$$W_N^{k[N-n]} = W_N^{-kn} = (W_N^{kn})^* = \text{Re}\{W_N^{kn}\} - j \text{Im}\{W_N^{kn}\}$$

- Περιοδικότητα (σε k και n)

$$W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n}$$

- Για παράδειγμα

$$\begin{aligned} & \text{Re}\{x[n]\} \text{Re}\{W_N^{kn}\} + \text{Re}\{x[N-n]\} \text{Re}\{W_N^{k[N-n]}\} \\ &= (\text{Re}\{x[n]\} + \text{Re}\{x[N-n]\}) \text{Re}\{W_N^{kn}\} \end{aligned}$$

- Μειώνεται ο αριθμός των πράξεων κατά 2

• Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier (FFT)

- Cooley και Tuckey (1965)
- Αλγόριθμος που εφαρμόζεται όταν ο αριθμός των στοιχείων είναι το γινόμενο δύο άλλων αριθμών
- Κατέληξε σε μια σειρά από πολύ αποδοτικούς αλγορίθμους
- Σήμερα τους λέμε όλους Γρήγορους Μετασχηματισμούς Fourier (FFT)
- Μοιράζεται ο μετασχηματισμός μήκους N σε όλο και μικρότερα κομμάτια
 - Αποδεκατισμός (decimation) στο χρόνο
 - Αποδεκατισμός (decimation) στη συχνότητα

- **Αποδεκατισμός (decimation) στο χρόνο**

- Το σήμα μοιράζεται σε όλο και μικρότερα κομμάτια (ζυγά και μονά στοιχεία)
- Λαμβάνεται υπ' όψη η περιοδικότητα και η συμμετρία του W

- Αν έχουμε σειρές με N δύναμη του 2

$$N = 2^v$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X[k] = \sum_{n \text{ even}} x[n] W_N^{kn} + \sum_{n \text{ odd}} x[n] W_N^{kn}$$

- Αποδεκατισμός (decimation) στο χρόνο

$$\begin{aligned}
 X[k] &= \sum_{n \text{ even}} x[n] W_N^{kn} + \sum_{n \text{ odd}} x[n] W_N^{kn} \\
 &= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r] W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1] W_N^{(2r+1)k} \\
 &= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r] (W_N^2)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1] (W_N^2)^{rk} \\
 &= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r] W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1] W_{N/2}^{rk} \\
 &= G[k] + W_N^k H[k], \quad k = 0, 1, \dots, N-1
 \end{aligned}$$

- Όμως, λόγω συμμετρίας του W , υπολογίζουμε μόνο

$$k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$$

• Αποδεκατισμός (decimation) στο χρόνο

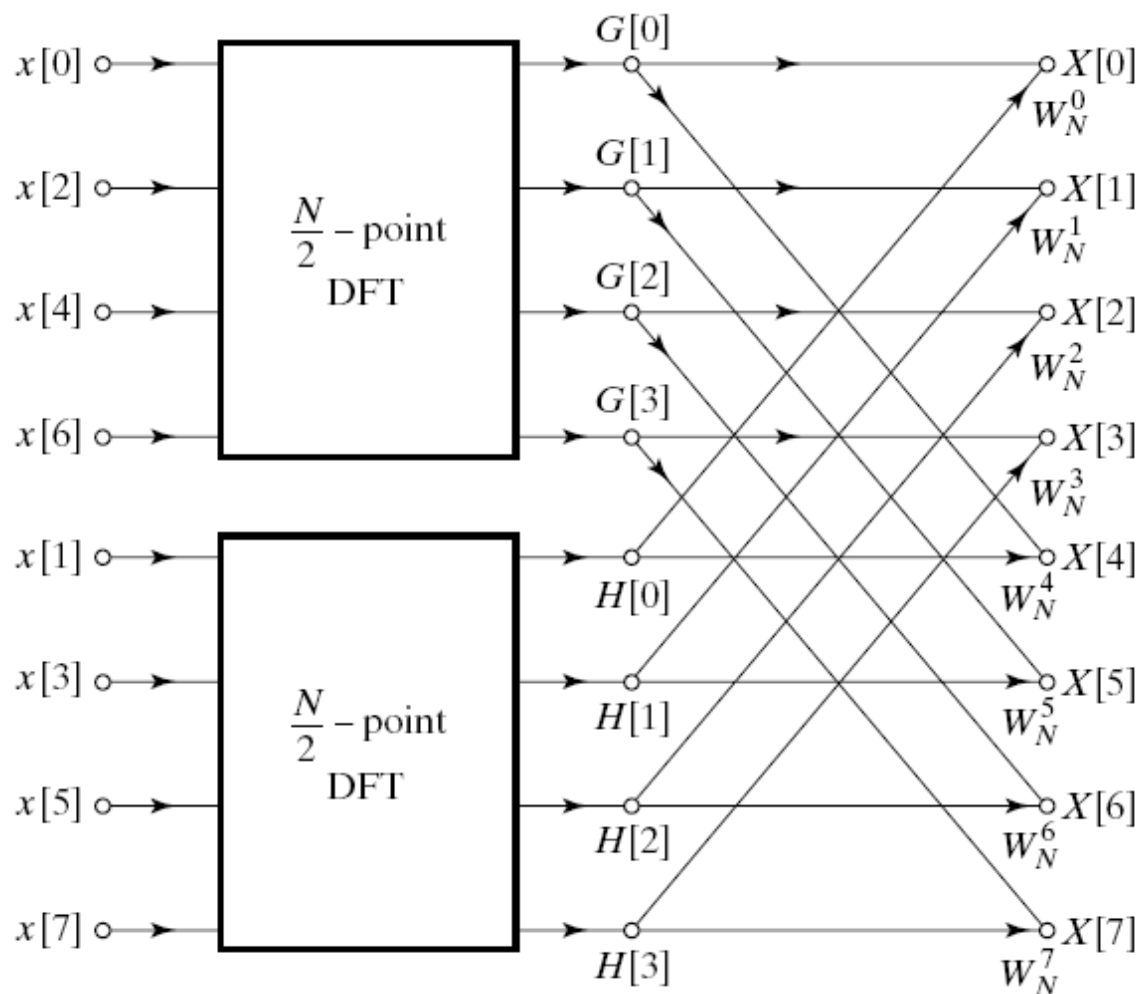


Figure 9.3 Flow graph of the decimation-in-time decomposition of an N -point DFT computation into two $(N/2)$ -point DFT computations ($N = 8$).

• Αποδεκατισμός (decimation) στο χρόνο

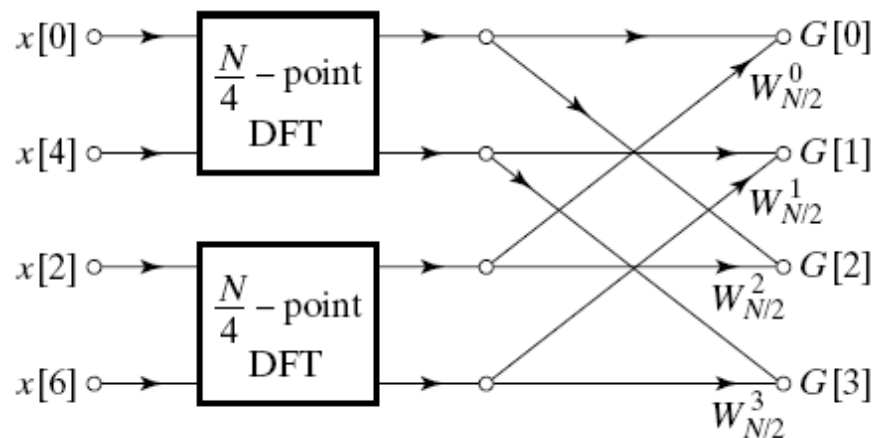


Figure 9.4 Flow graph of the decimation-in-time decomposition of an $(N/2)$ -point DFT computation into two $(N/4)$ -point DFT computations ($N = 8$).

• Αποδεκατισμός (decimation) στο χρόνο

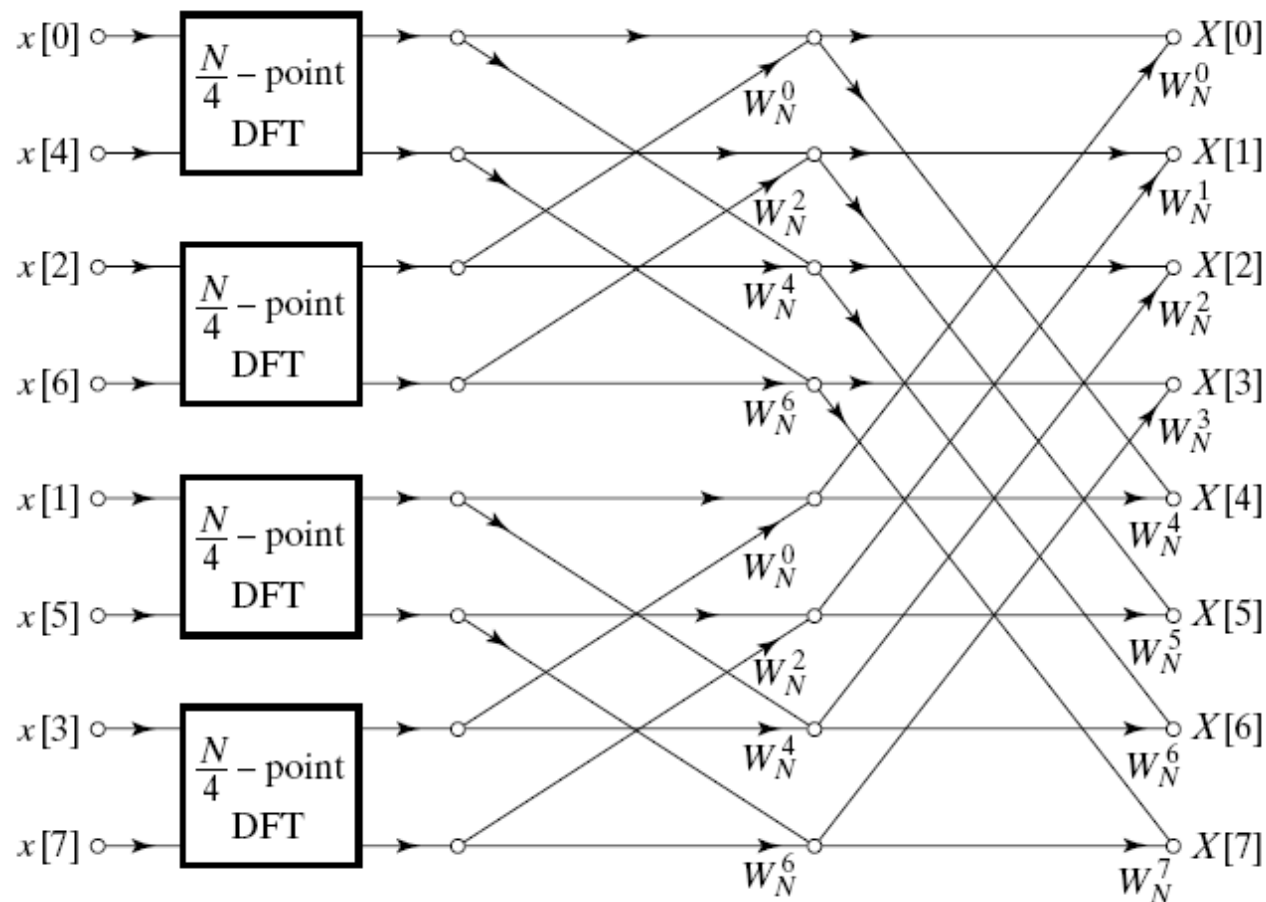


Figure 9.5 Result of substituting the structure of Figure 9.4 into Figure 9.3.

- Αποδεκατισμός (decimation) στο χρόνο

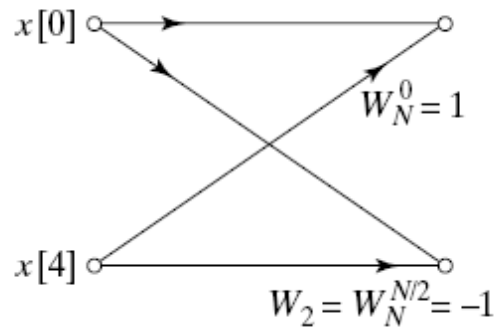


Figure 9.6 Flow graph of a 2-point DFT.

• Αποδεκατισμός (decimation) στο χρόνο

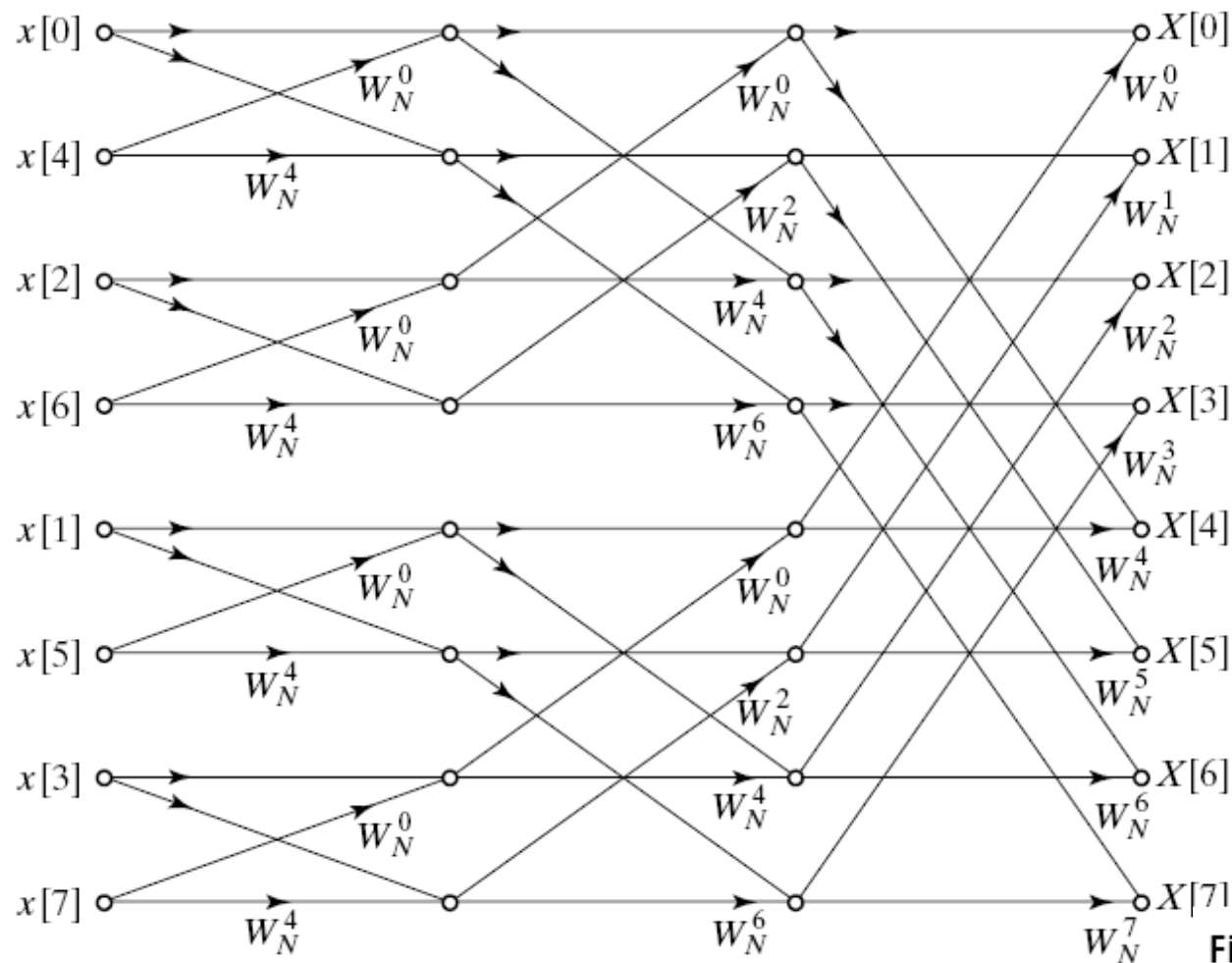


Figure 9.7 Flow graph of complete decimation-in-time decomposition of an 8-point DFT computation.

- **Αποδεκατισμός (decimation) στο χρόνο**

- Για κάθε στάδιο
 - Μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί: N
 - Μιγαδικές προσθέσεις: N
- Σύνολο
 - Στάδια: $\log_2 N$
 - $N \log_2 N$ προσθέσεις και πολλαπλασιασμοί
- Μεγάλη μείωση
 - $N = 2^{10} = 1024$
 - $N^2 = 1\,048\,576$
 - $N \log_2 N = 10\,240$
 - 100 φορές μείωση!

• Αποδεκατισμός (decimation) στο χρόνο

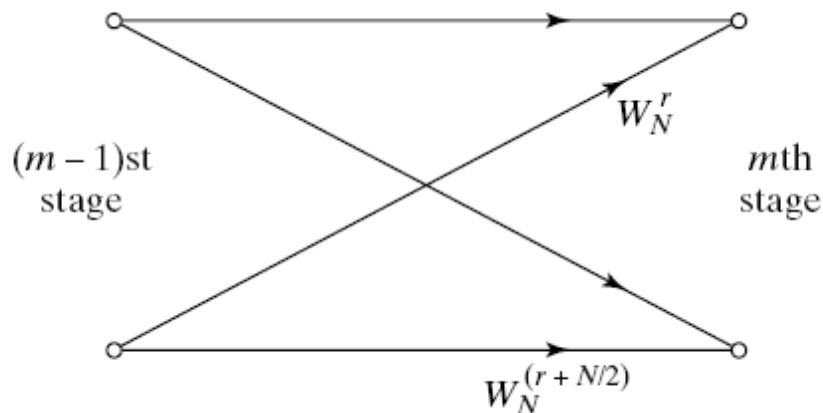


Figure 9.8 Flow graph of basic butterfly computation in Figure 9.7.

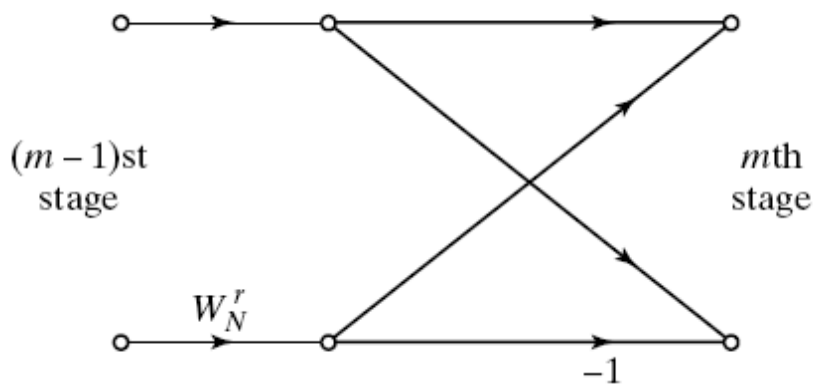


Figure 9.9 Flow graph of simplified butterfly computation requiring only one complex multiplication.

• Αποδεκατισμός (decimation) στο χρόνο

- Μείωση των μιγαδικών πολλαπλασιασμών στο μισό

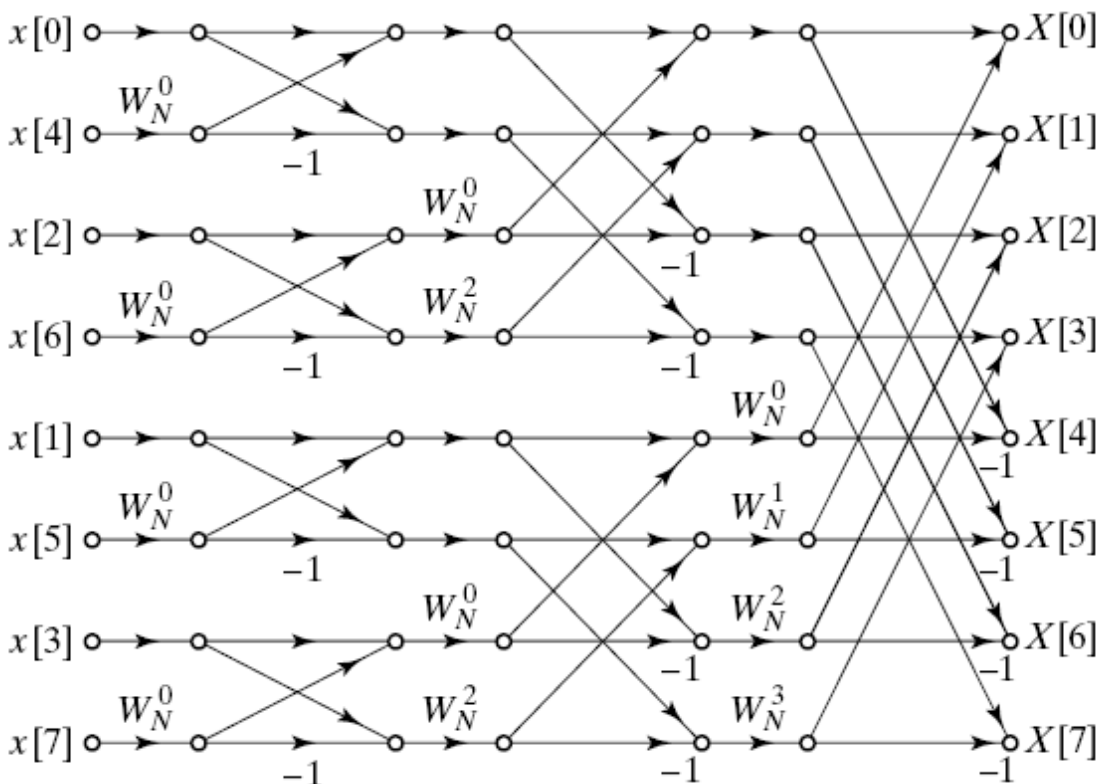


Figure 9.10 Flow graph of 8-point DFT using the butterfly computation of Figure 9.9.

• Αποδεκατισμός (decimation) στη συχνότητα

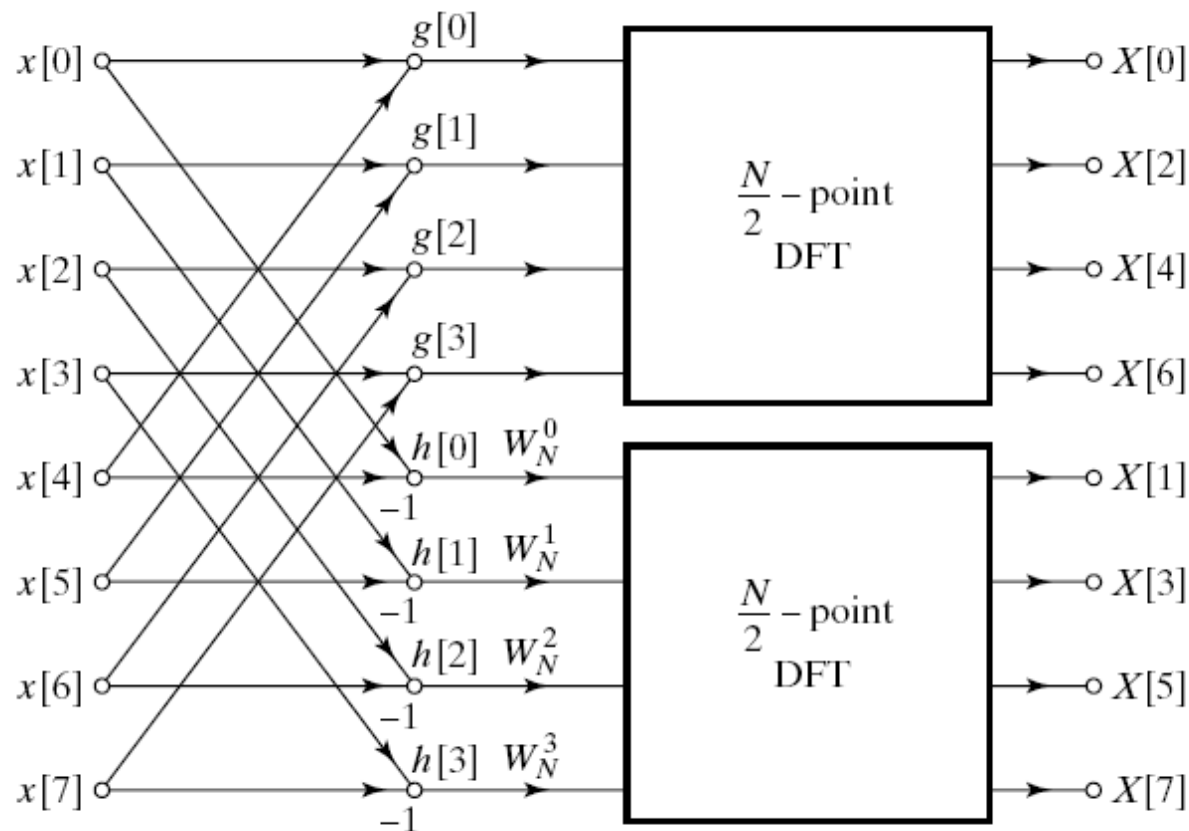


Figure 9.17 Flow graph of decimation-in-frequency decomposition of an N -point DFT computation into two $(N/2)$ -point DFT computations ($N = 8$).

• Αποδεκατισμός (decimation) στη συχνότητα

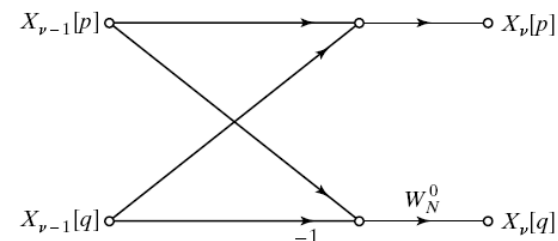
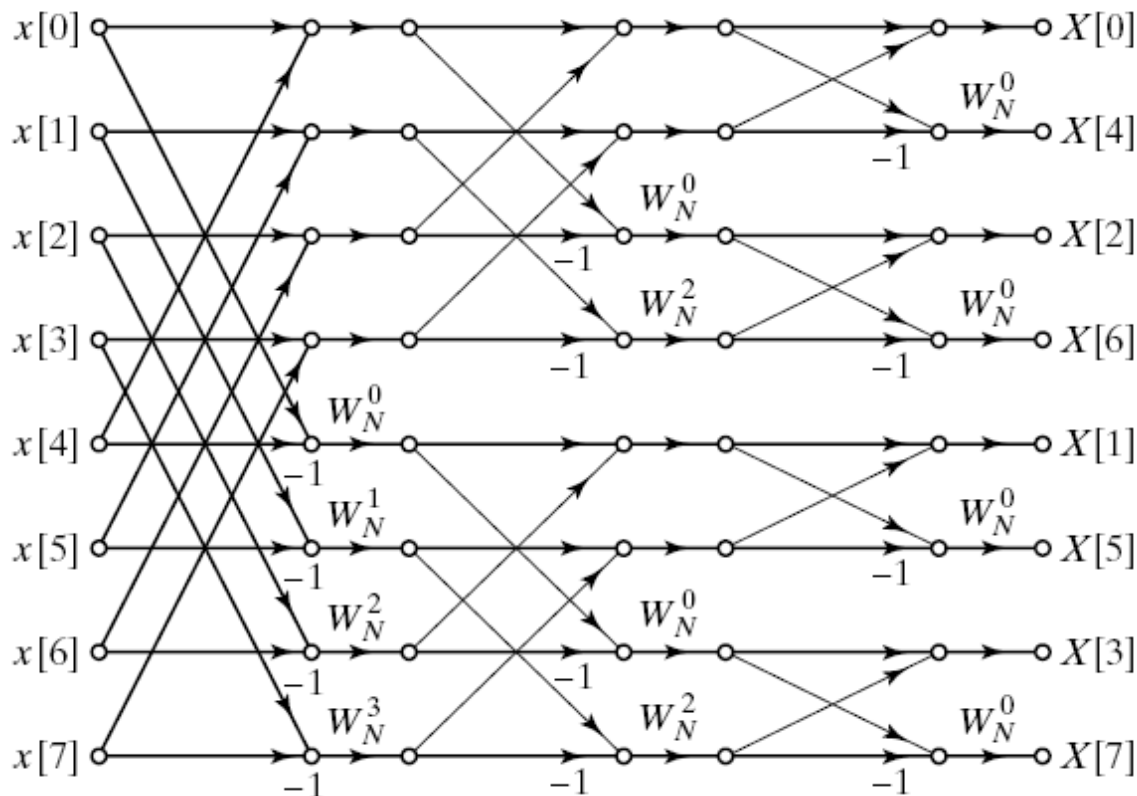


Figure 9.20 Flow graph of complete decimation-in-frequency decomposition of an 8-point DFT computation.

• Αναδιατάξεις της διαδικασίας

- Ίδιος αλγόριθμος με αναδιάταξη των διακλαδώσεων
- Σειρά με αντιστραμμένα ψηφία (bit-reversed order)
- Σειρά με στοιχεία σε σειρά
 - Σειριακή πρόσβαση και αποθήκευση δεδομένων
 - Όταν ο μετασχηματισμός δεν χωρά στη RAM

$$\begin{aligned}
 X_0[000] &= x[000], \\
 X_0[001] &= x[100], \\
 X_0[010] &= x[010], \\
 X_0[011] &= x[110], \\
 X_0[100] &= x[001], \\
 X_0[101] &= x[101], \\
 X_0[110] &= x[011], \\
 X_0[111] &= x[111].
 \end{aligned}$$

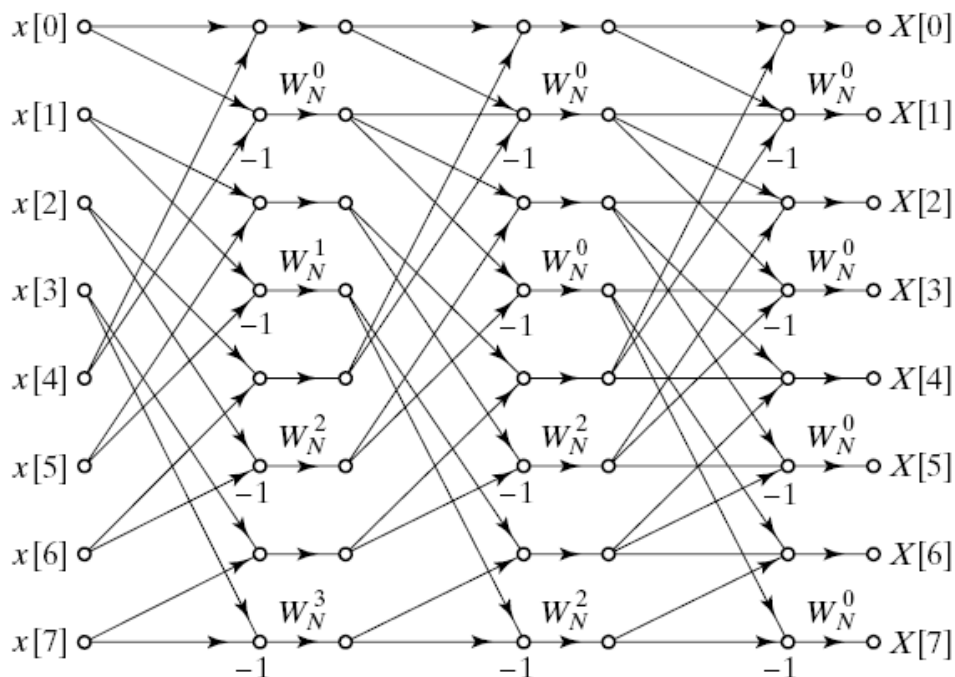
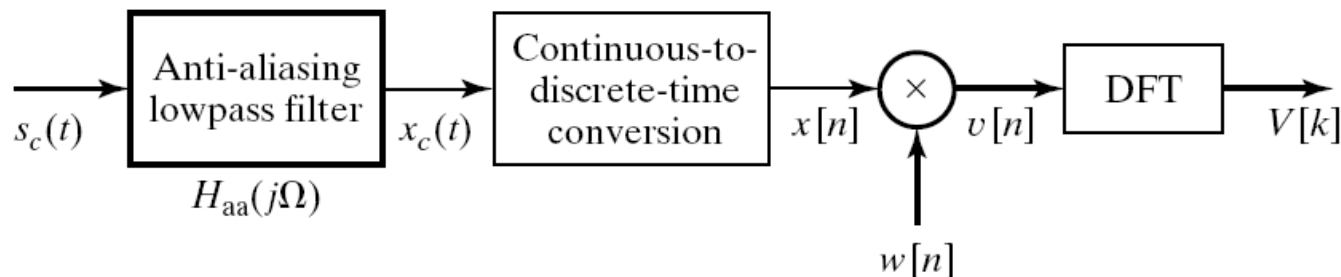
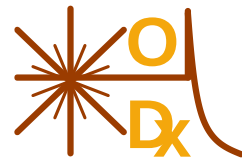


Figure 9.24 Rearrangement of Figure 9.20 having the same geometry for each stage, thereby permitting sequential data accessing and storage. (Transpose of Figure 9.16.)

• Ανάλυση σημάτων

- Τι πρέπει να προσέξουμε
 - Επαρκής ψηφιοποίηση στο χρόνο (Nyquist)
 - Αναδίπλωση (aliasing) λόγω ψηφιοποίησης
 - Επαρκής ψηφιοποίηση στη συχνότητα (μέγεθος FFT)
 - Επαρκές μέγεθος FFT ώστε να αποφεύγουμε κυκλική συνέλιξη
 - Ευκρίνεια του μετασχηματισμού λόγω παράθυρου (window) στο χρόνο



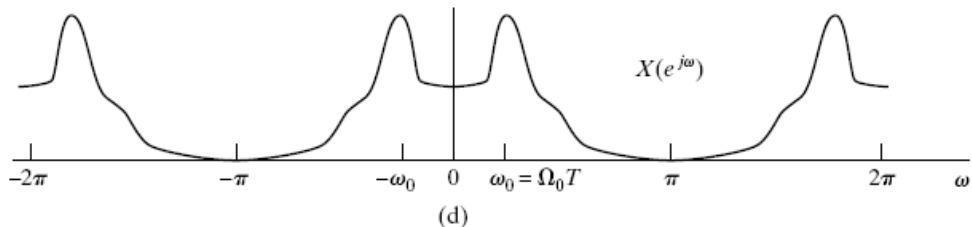
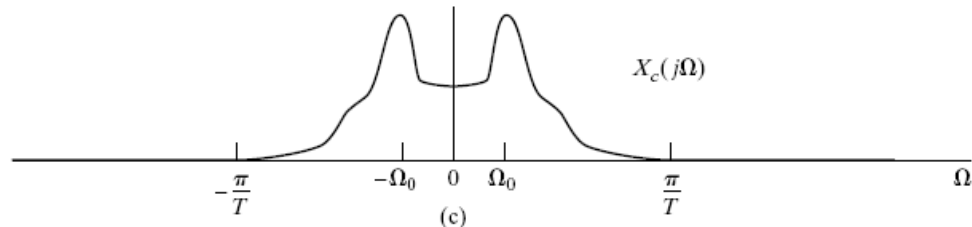
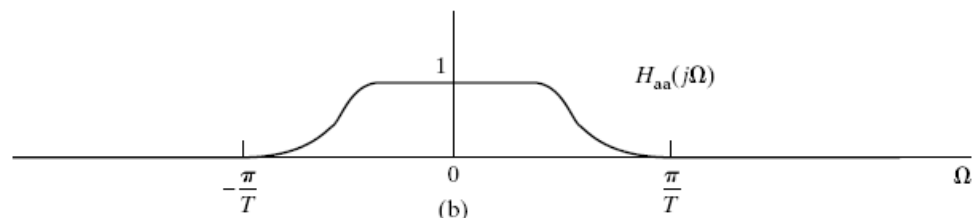
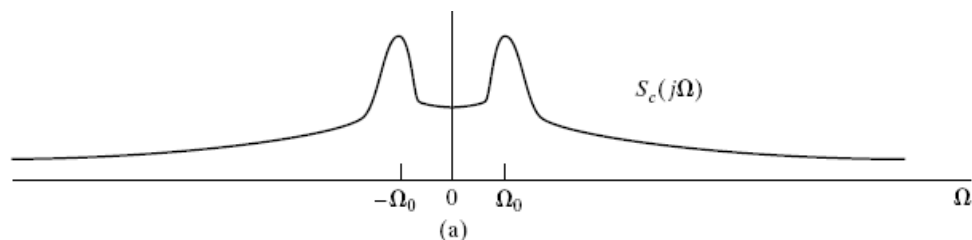
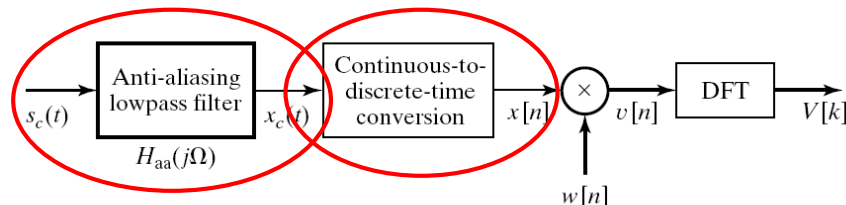


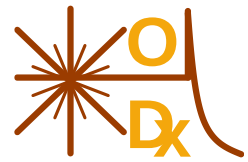
• Επαρκής συχνότητα ψηφιοποίησης

- Nyquist: $\geq 2 \Omega_{\max}$
- Για πιο ακριβείς μετρήσεις χρησιμοποιήστε 4-8 $\Omega_{\max}$ (αν το σύστημα σας το επιτρέπει)
- $f_s \uparrow \rightarrow \mathcal{E} \uparrow \uparrow$

• Αναδίπλωση (aliasing) λόγω ψηφιοποίησης

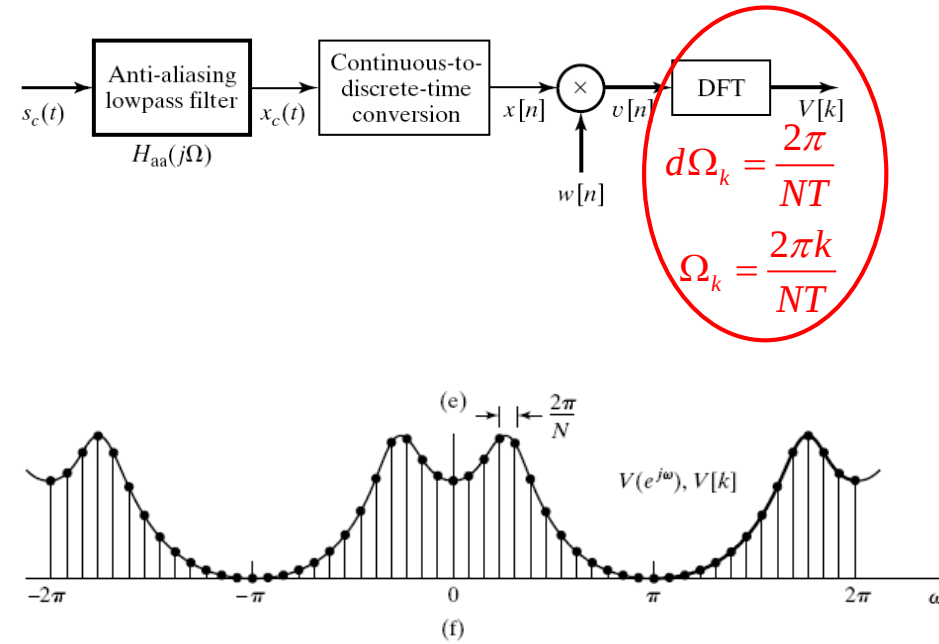
- Αν το σήμα δεν έχει πεπερασμένο (finite) φάσμα
- Φίλτρο $H(j\Omega)$ αποκόπτει τις συχνότητες πάνω από $|f_s/2|$





- **Επαρκής ψηφιοποίηση στη συχνότητα (μέγεθος FFT)**

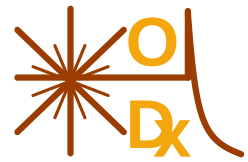
- Ψηφιοποίηση πρέπει να είναι επαρκής ώστε να μπορούμε να “βλέπουμε” μικρές συχνότητες
- Nyquist στη συχνότητα
 - $d\Omega \rightarrow$ το μισό της μικρότερης συχνότητας που μπορούμε να δούμε



- **Επαρκές μέγεθος FFT ώστε να αποφεύγουμε κυκλική συνέλιξη**

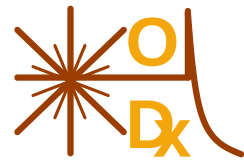
- Μόνο αν θα ακολουθήσει συνέλιξη
- $N_{\text{FFT}} = N_1 + N_2 - 1$

- **Το μέγεθος του FFT καθορίζεται και από τους δύο πιο πάνω παράγοντες**



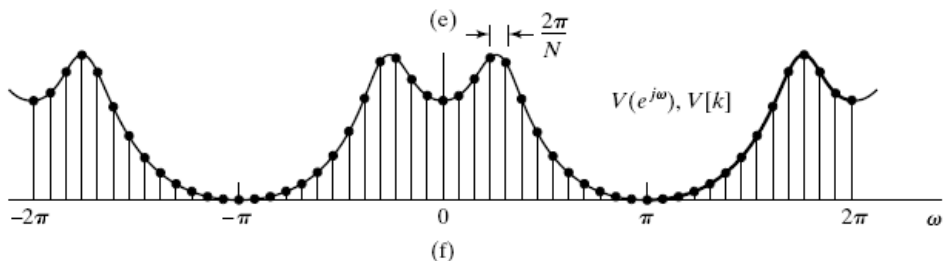
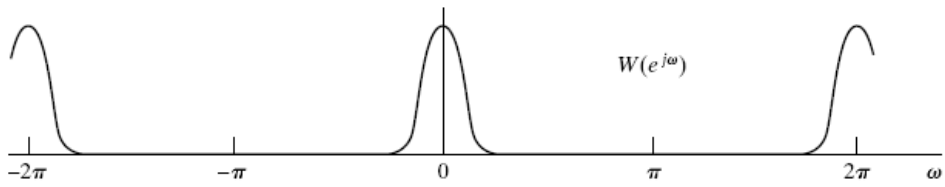
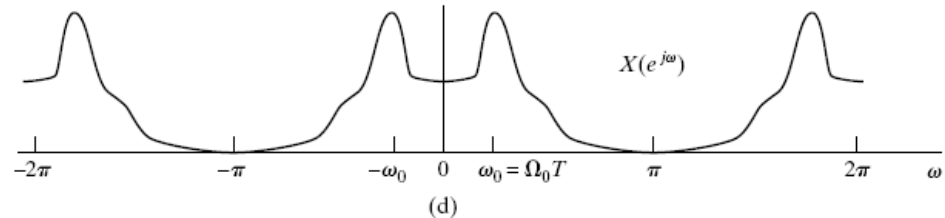
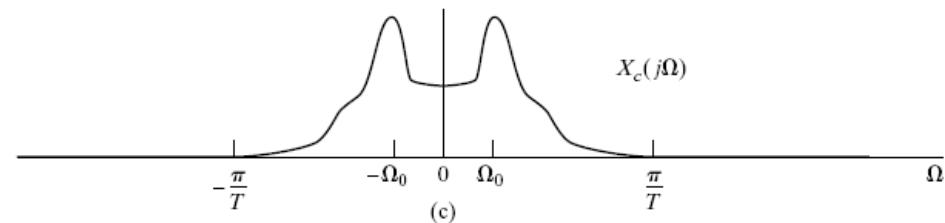
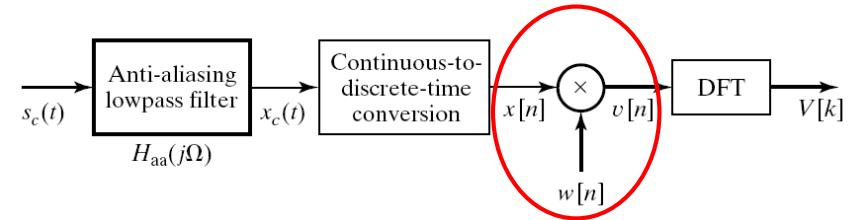
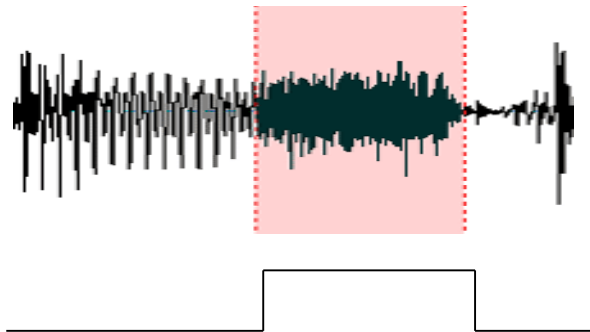
- Παράδειγμα

- Σήμα
 - Φάσμα $X_c(j\Omega)=0$ για $|\Omega| \geq 2\pi(2500)$
- Θέλω τα δείγματα του φάσματος να μην απέχουν περισσότερο από $2\pi(10)$ rad/s ← **Προσοχή! Αυτό δεν είναι το ίδιο με την ευκρίνεια!**
- Συχνότητα δειγματοληψίας: _____
- Αριθμός στοιχείων FFT: _____
- Σημείο του FFT που αντιστοιχεί σε συχνότητα 1000 Hz: _____
- Αν το σύστημα δειγματοληψίας μας επιτρέπει μόνο μέχρι 2000 samples/s;



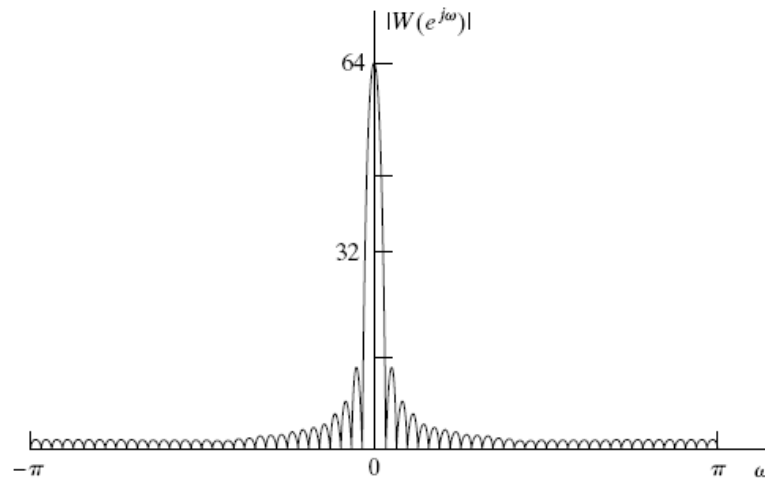
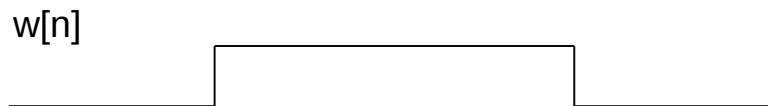
• Ευκρίνεια του μετασχηματισμού λόγω παράθυρου (window) στο χρόνο

- Πραγματικά σήματα $\rightarrow$ μεγάλος χρόνος σε σχέση με FFT
- Χρησιμοποιούμε μόνο μέρος του σήματος
 - Πολλαπλασιασμός με “παράθυρο”
 - Συνέλιξη του φάσματος με φάσμα του παραθύρου
 - Μειώνεται η ευκρίνεια στο χώρο της συχνότητας

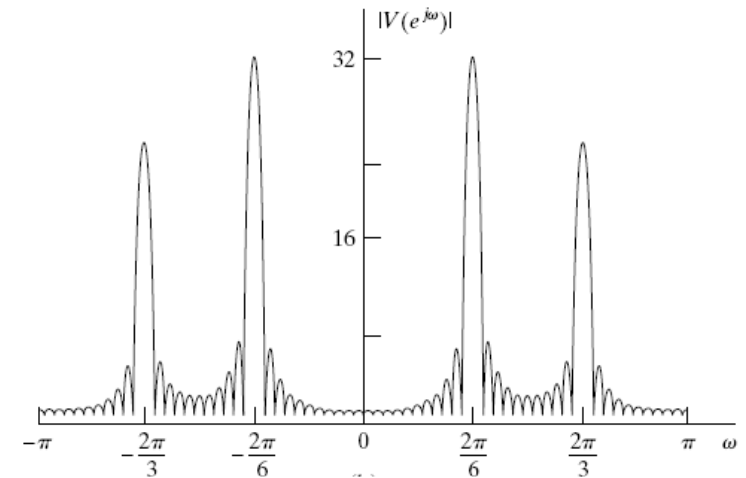


- Ευκρίνεια του μετασχηματισμού λόγω παράθυρου (window) στο χρόνο

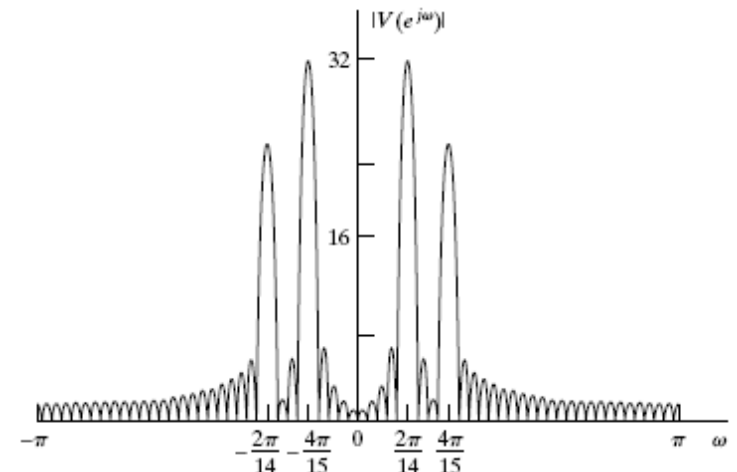
- Παράδειγμα
 - Δύο συνημίτονα Ω_0 και Ω_1
 - Τετραγωνικό παράθυρο



$$\Omega_0 = (2\pi/6) \times 10^4, \Omega_1 = (2\pi/3) \times 10^4$$

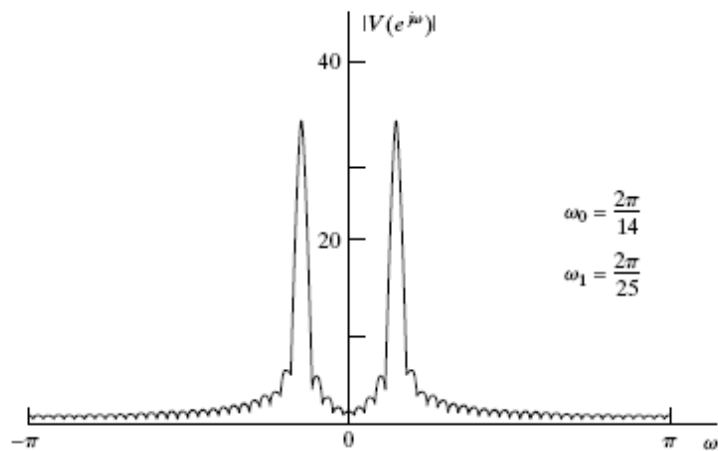
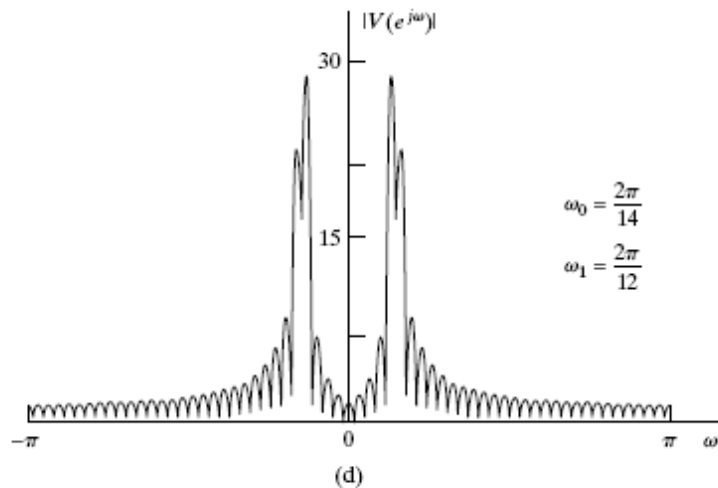
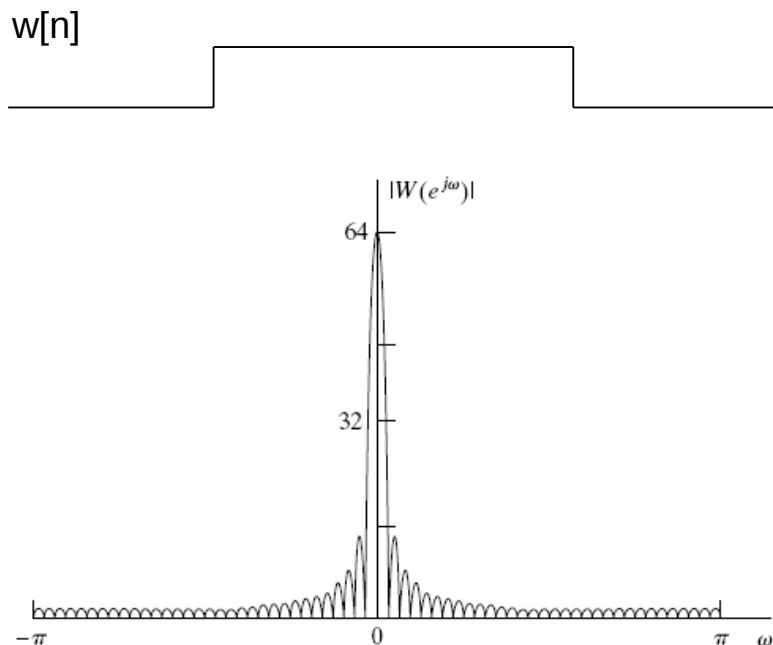


$$\Omega_0 = (2\pi/14) \times 10^4, \Omega_1 = (4\pi/15) \times 10^4$$

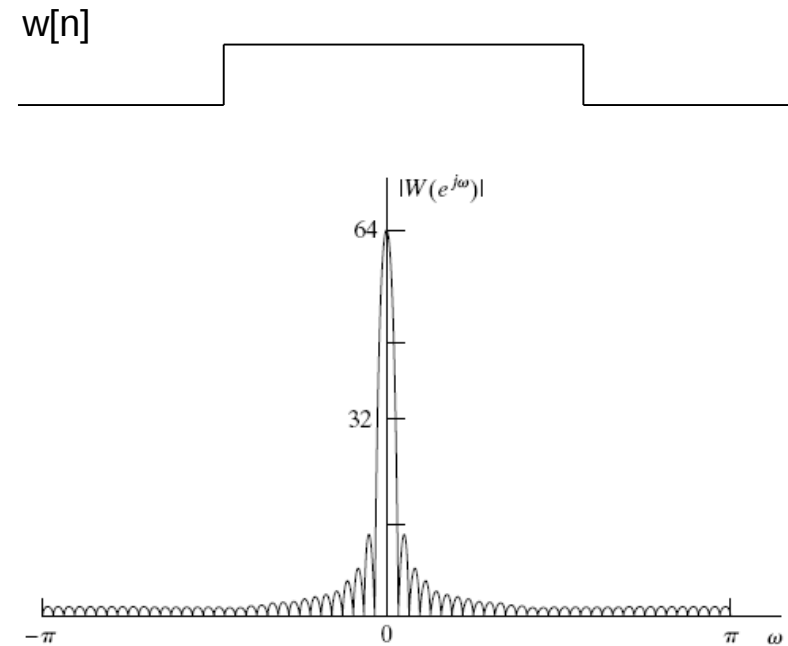


- Ευκρίνεια του μετασχηματισμού λόγω παράθυρου (window) στο χρόνο

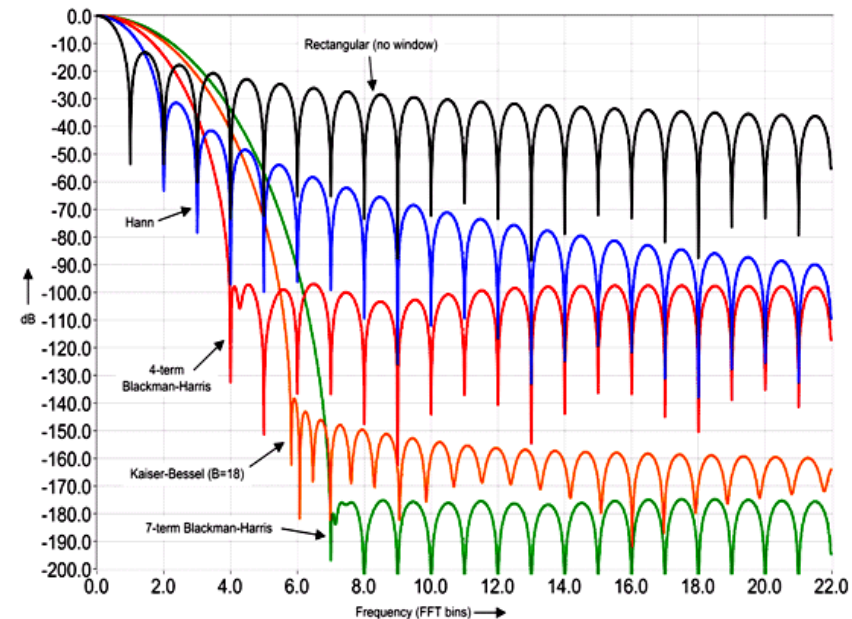
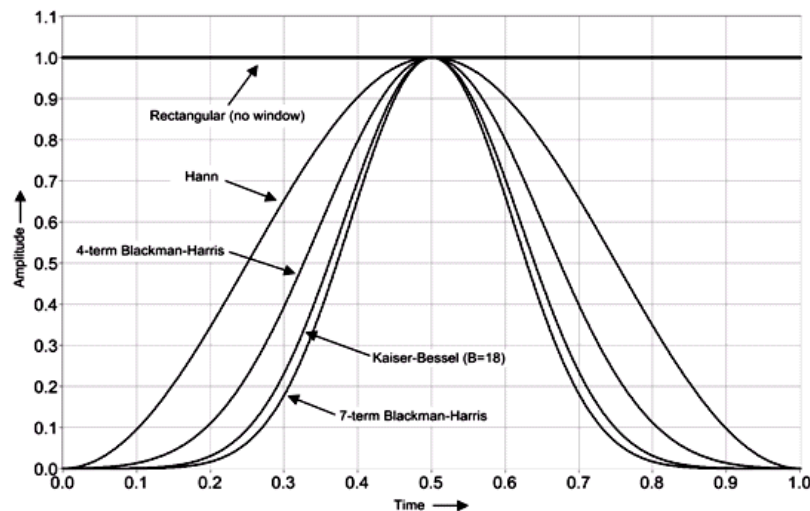
- Παράδειγμα
 - Δύο συνημίτονα Ω_0 και Ω_1
 - Τετραγωνικό παράθυρο



- Ευκρίνεια του μετασχηματισμού λόγω παραθύρου (window) στο χρόνο
 - Κυριότερα προβλήματα με το φάσμα του παραθύρου
 - Πλάτος του κυρίως λοβού (main lobe) $\rightarrow \Delta_{ml}$
 - Σχετικό ύψος πλευρικού λοβού / κυρίως λοβού (relative side-main lobe level) $\rightarrow A_{sl}$
 - Μείωση των πλευρικών λοβών ανά δεκάδα (side-lobe roll off per decade) $\rightarrow A_{ro}$



- Ευκρίνεια του μετασχηματισμού λόγω παράθυρου (window) στο χρόνο



Window type	-3 dB Main-lobe width	Max sidelobe level [dB]	Sidelobe roll-off [dB/decade]
Rectangular	$2\pi/t$	-13.2	20
Hamming	$8\pi/t$	- 41.9	20
Hanning	$8\pi/t$	- 31.6	60
Blackman	$12\pi/t$	-58	60

- **Παράδειγμα**

- Φωνητικό σήμα (π.χ. ομιλία)
 - Φάσμα 1-20 kHz
 - Διάρκεια 3 ώρες
- Ζητούμενα
 - Να διακρίνονται διαφορές συχνότητας ≤ 100 Hz
 - Να διακρίνονται συχνότητες με διαφορά στο πλάτος ≥ -45 dB (ονομάζεται και δυναμικό εύρος ή dynamic range)
 - Θα ακολουθήσει επεξεργασία με FFT και με συνέλιξη μεταξύ δύο τέτοιων σημάτων
- Χαρακτηριστικά
 - Παράθυρο: _____
 - f_s : _____
 - N : _____
 - N_{fft} : _____