



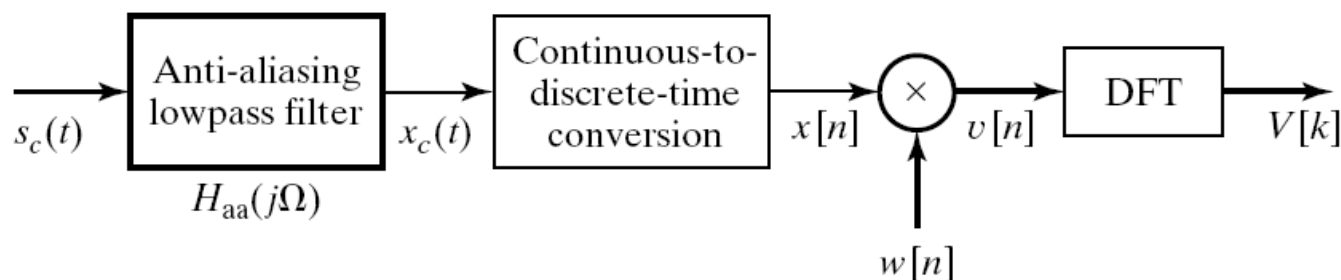
Διαλέξεις 17 & 18

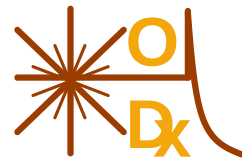
Fourier Ανάλυση Σημάτων

(Επανάληψη Κεφ. 10.0-10.2, Κεφ. 10.3, 10.5-7)

- **Ανάλυση σημάτων**

- Τι πρέπει να προσέξουμε
 - Επαρκής ψηφιοποίηση στο χρόνο (Nyquist)
 - Αναδίπλωση (aliasing) λόγω ψηφιοποίησης
 - Επαρκής ψηφιοποίηση στη συχνότητα (μέγεθος FFT)
 - Επαρκές μέγεθος FFT ώστε να αποφεύγουμε κυκλική συνέλιξη
 - Ευκρίνεια του μετασχηματισμού λόγω παράθυρου (window) στο χρόνο



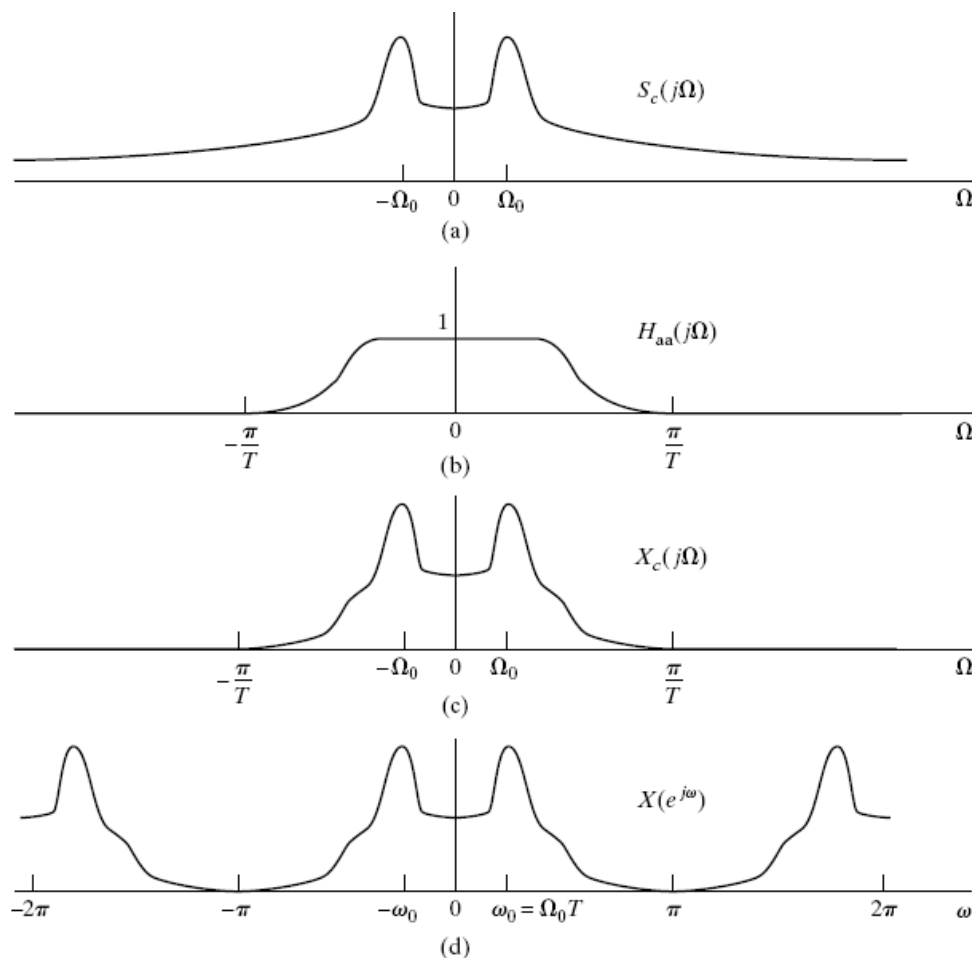
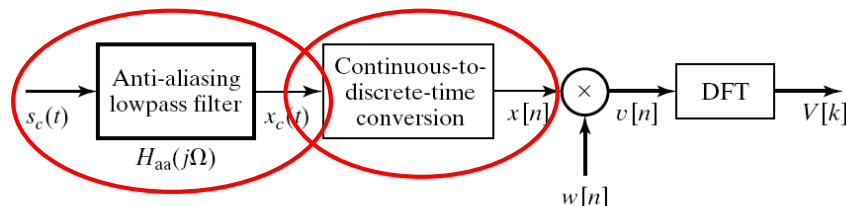


• Επαρκής συχνότητα ψηφιοποίησης

- Nyquist: $\geq 2 \Omega_{\max}$
- Για πιο ακριβείς μετρήσεις χρησιμοποιήστε 4-8 $\Omega_{\max}$ (αν το σύστημα σας το επιτρέπει)
- $f_s \uparrow \rightarrow \mathcal{E} \uparrow \uparrow$

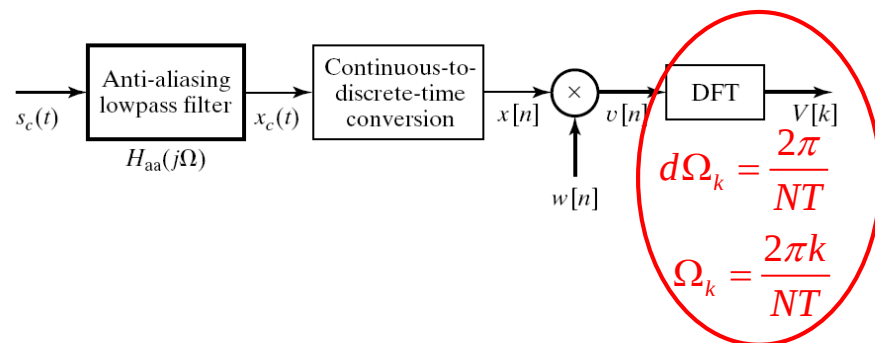
• Αναδίπλωση (aliasing) λόγω ψηφιοποίησης

- Αν το σήμα δεν έχει πεπερασμένο (finite) φάσμα
- Φίλτρο $H(j\Omega)$ αποκόπτει τις συχνότητες πάνω από $|f_s/2|$



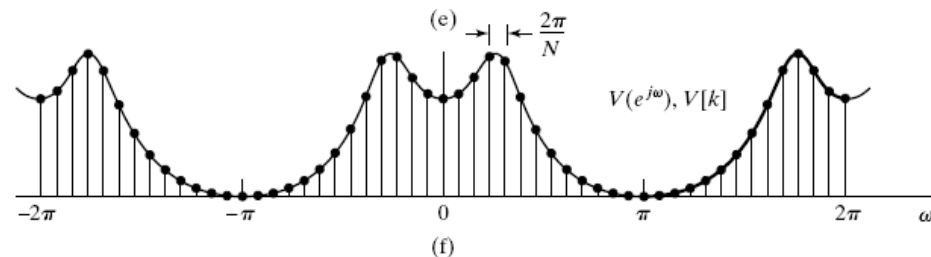
- **Επαρκής ψηφιοποίηση στη συχνότητα (μέγεθος FFT)**

- Ψηφιοποίηση πρέπει να είναι επαρκής ώστε να μπορούμε να “βλέπουμε” μικρές συχνότητες
- Nyquist στη συχνότητα
 - $d\Omega \rightarrow$ το μισό της μικρότερης συχνότητας που μπορούμε να δούμε

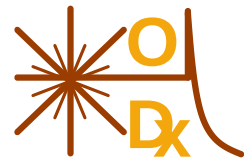


- **Επαρκές μέγεθος FFT ώστε να αποφεύγουμε κυκλική συνέλιξη**

- Μόνο αν θα ακολουθήσει συνέλιξη
- $N_{\text{FFT}} = N_1 + N_2 - 1$



- **Το μέγεθος του FFT καθορίζεται και από τους δύο πιο πάνω παράγοντες**



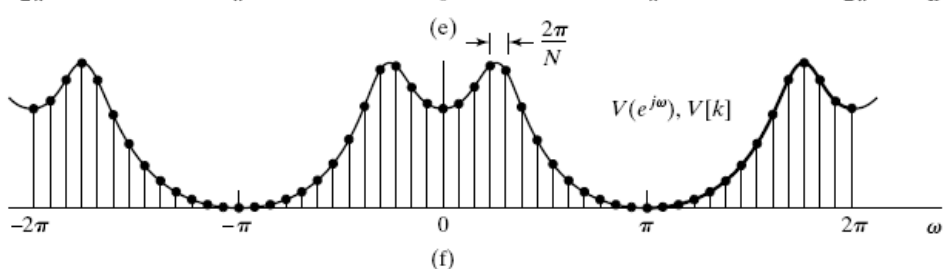
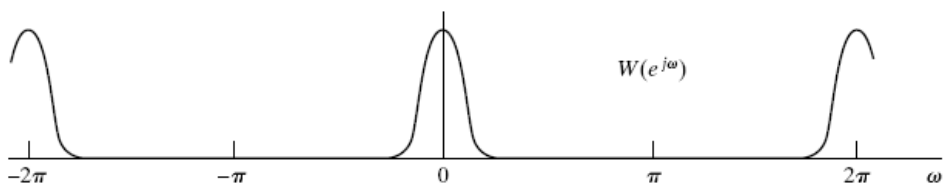
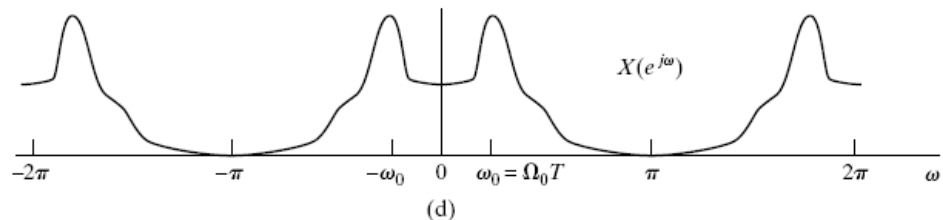
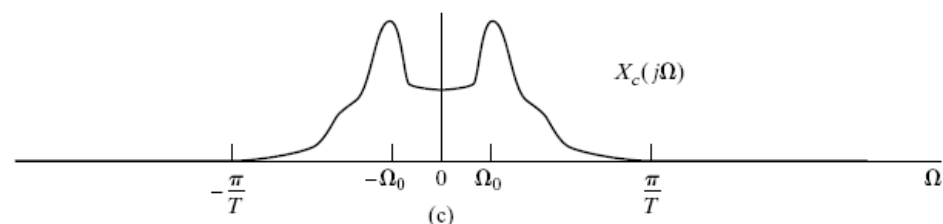
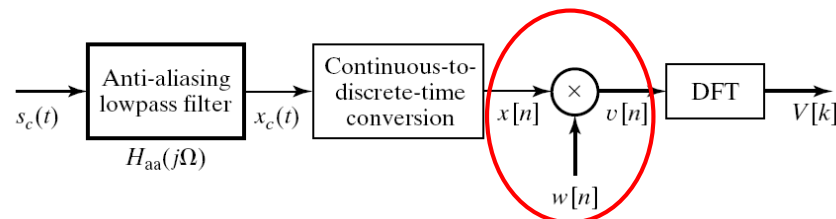
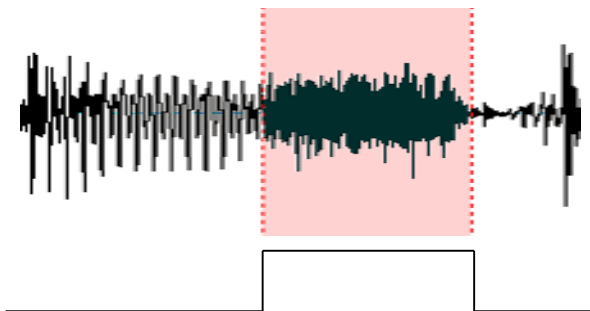
- Παράδειγμα

- Σήμα
 - Φάσμα $X_c(j\Omega)=0$ για $|\Omega| \geq 2\pi(2500)$
- Θέλω τα δείγματα του φάσματος να μην απέχουν περισσότερο από $2\pi(10)$ rad/s ← **Προσοχή! Αυτό δεν είναι το ίδιο με την ευκρίνεια!**

- Συχνότητα δειγματοληψίας: _____
- Αριθμός στοιχείων FFT: _____
- Σημείο του FFT που αντιστοιχεί σε συχνότητα 1000 Hz: _____
- Αν το σύστημα δειγματοληψίας μας επιτρέπει μόνο μέχρι 2000 samples/s;

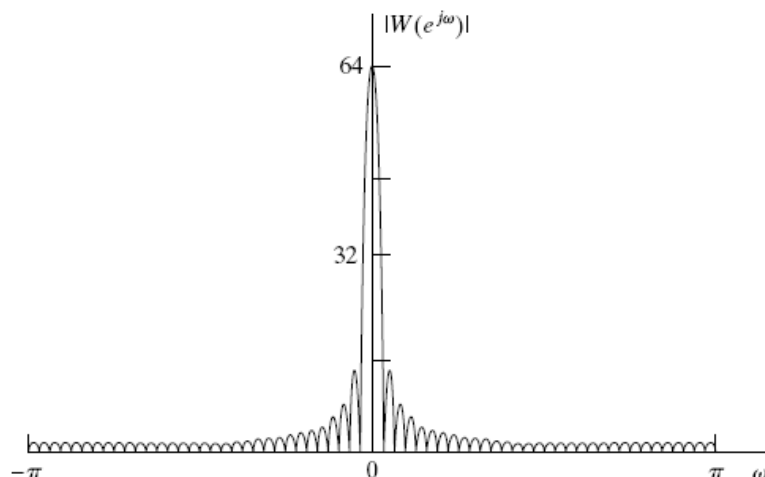
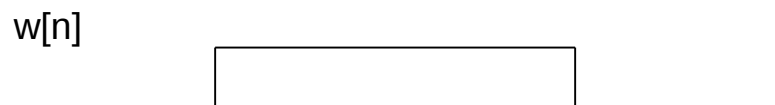
• Ευκρίνεια του μετασχηματισμού λόγω παράθυρου (window) στο χρόνο

- Πραγματικά σήματα $\rightarrow$ μεγάλος χρόνος σε σχέση με FFT
- Χρησιμοποιούμε μόνο μέρος του σήματος
 - Πολλαπλασιασμός με “παράθυρο”
 - Συνέλιξη του φάσματος με φάσμα του παραθύρου
 - Μειώνεται η ευκρίνεια στο χώρο της συχνότητας

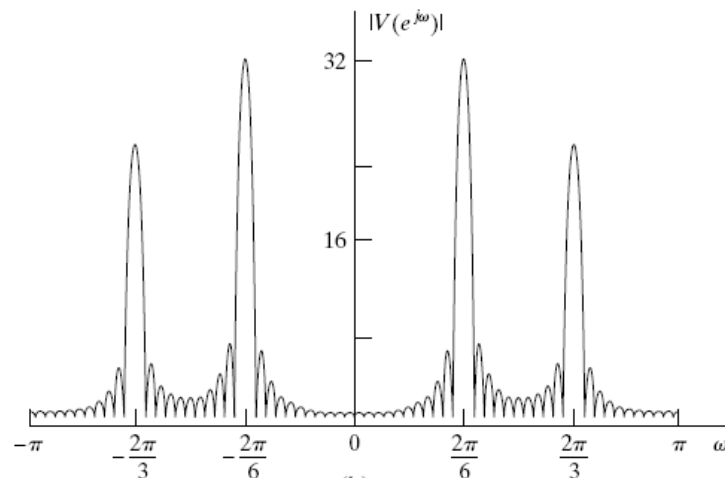


- Ευκρίνεια του μετασχηματισμού λόγω παράθυρου (window) στο χρόνο

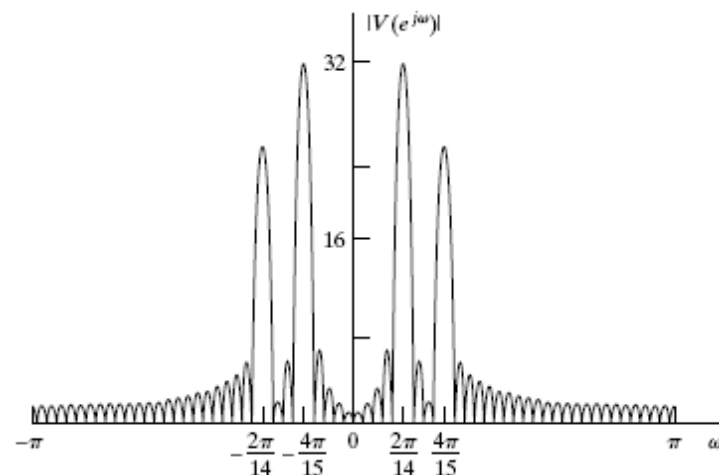
- Παράδειγμα
 - Δύο συνημίτονα Ω_0 και Ω_1
 - Τετραγωνικό παράθυρο



$$\Omega_0 = (2\pi/6) \times 10^4, \Omega_1 = (2\pi/3) \times 10^4$$

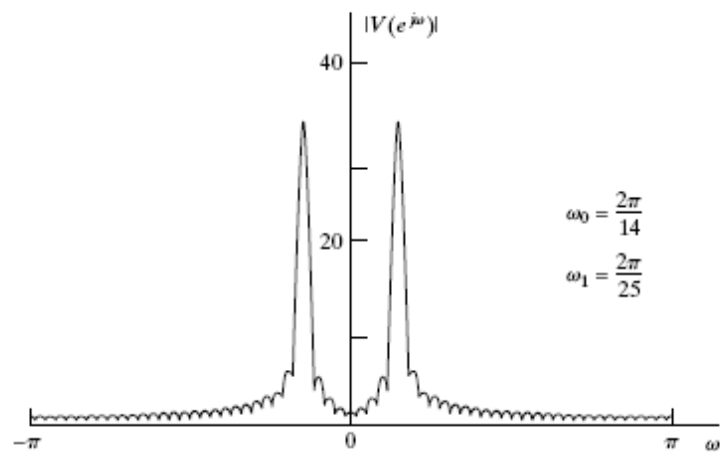
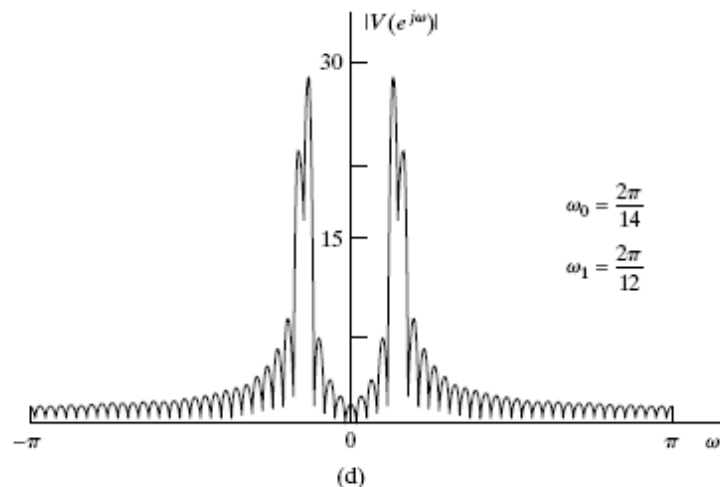
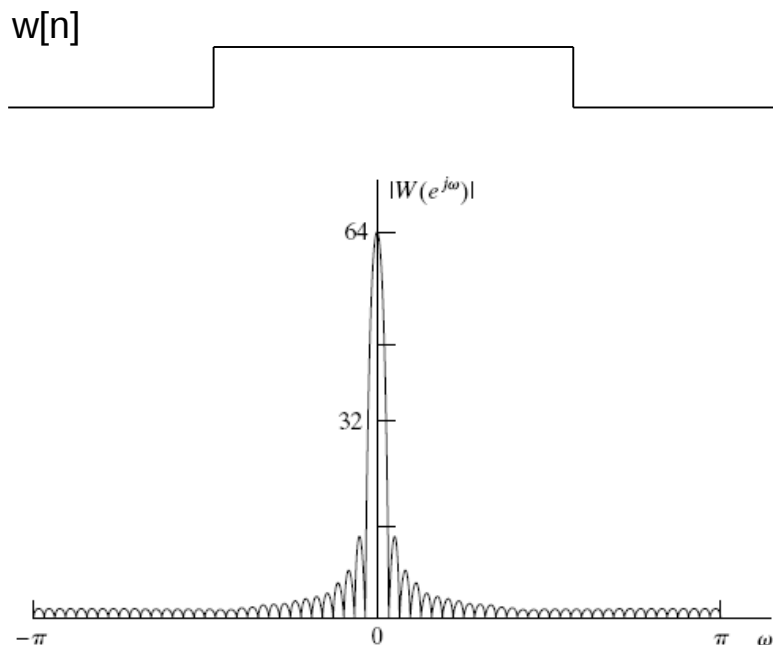


$$\Omega_0 = (2\pi/14) \times 10^4, \Omega_1 = (4\pi/15) \times 10^4$$



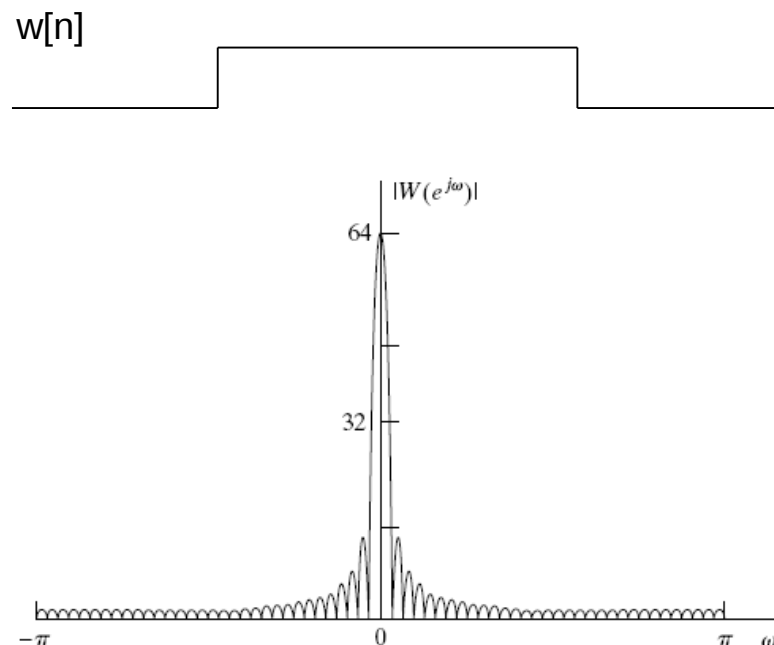
- Ευκρίνεια του μετασχηματισμού λόγω παράθυρου (window) στο χρόνο

- Παράδειγμα
 - Δύο συνημίτονα Ω_0 και Ω_1
 - Τετραγωνικό παράθυρο

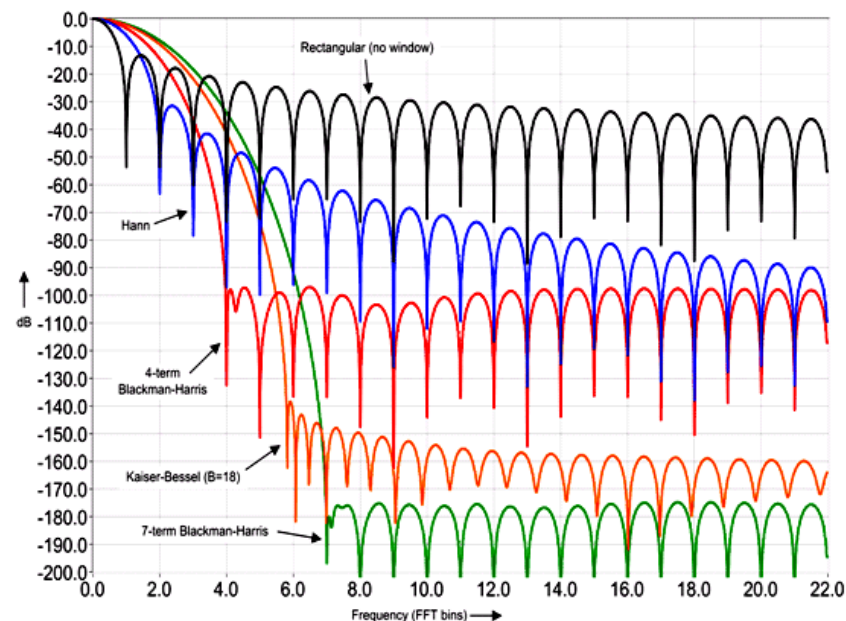
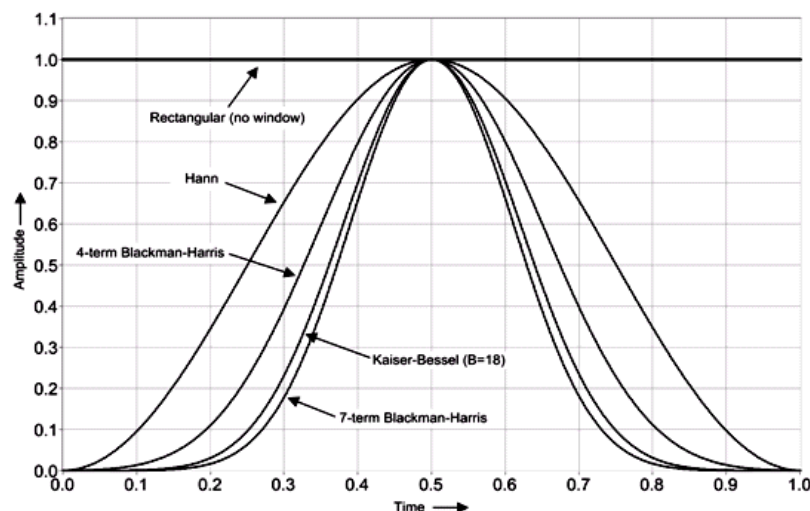


- **Ευκρίνεια του μετασχηματισμού λόγω παράθυρου (window) στο χρόνο**

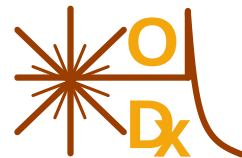
- Κυριότερα προβλήματα με το φάσμα του παραθύρου
 - Πλάτος του κυρίως λοβού (main lobe) $\rightarrow \Delta_{ml}$
 - Σχετικό ύψος πλευρικού λοβού / κυρίως λοβού (relative side-main lobe level) $\rightarrow A_{sl}$
 - Μείωση των πλευρικών λοβών ανά δεκάδα (side-lobe roll off per decade) $\rightarrow A_{ro}$



- Ευκρίνεια του μετασχηματισμού λόγω παράθυρου (window) στο χρόνο



Window type	-3 dB Main-lobe width	Max sidelobe level [dB]	Sidelobe roll-off [dB/decade]
Rectangular	$2\pi/t$	-13.2	20
Hamming	$8\pi/t$	- 41.9	20
Hanning	$8\pi/t$	- 31.6	60
Blackman	$12\pi/t$	-58	60



• Παράδειγμα

- Φωνητικό σήμα (π.χ. ομιλία)
 - Φάσμα 1-20 kHz
 - Διάρκεια 3 ώρες
- Ζητούμενα
 - Να διακρίνονται διαφορές συχνότητας ≤ 100 Hz
 - Να διακρίνονται συχνότητες με διαφορά στο πλάτος ≥ -45 dB (ονομάζεται και δυναμικό εύρος ή dynamic range)
 - Θα ακολουθήσει επεξεργασία με FFT και με συνέλιξη μεταξύ δύο τέτοιων σημάτων
- Χαρακτηριστικά
 - Παράθυρο: _____
 - fs: _____
 - N: _____
 - N_{fft} : _____

- Σήματα των οποίων η συχνότητα μεταβάλλεται με το χρόνο (π.χ. chirp)

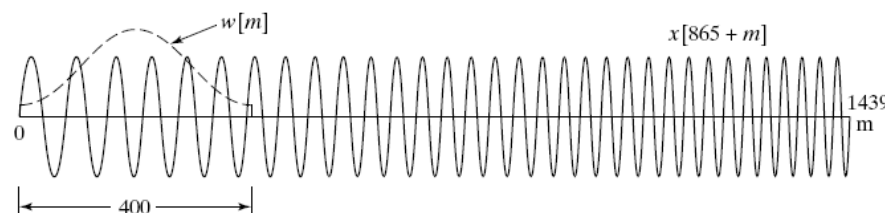
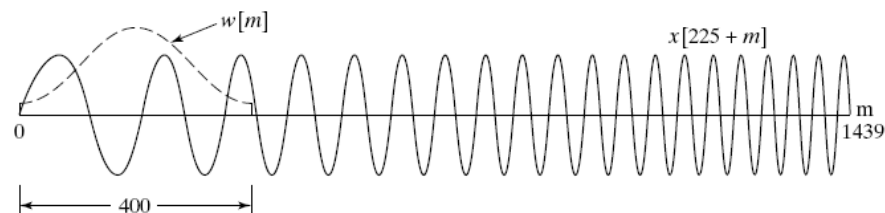
- Ένας FFT δεν είναι αρκετός
- Μετασχηματισμός Fourier Εξαρτώμενος από το χρόνο (Time Dependent Fourier Transform)

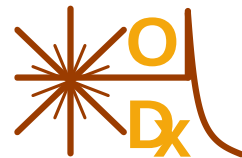
$$X[n, \lambda] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n+m]w[m]e^{-j\lambda m},$$

- η διακριτό και λ συνεχές
- Σαν να βλέπουμε το σήμα μέσα από ένα παράθυρο
- Θέλουμε παράθυρο με χαμηλούς πλευρικούς λοβούς και όσο το μεγαλύτερο γίνεται (γιατί;)
- Υπάρχει και ο αντίστροφος ΜΦ

$$x[n+m]w[m] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X[n, \lambda] e^{j\lambda m} d\lambda, \quad -\infty < m < \infty,$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi w[0]} \int_0^{2\pi} X[n, \lambda] d\lambda$$





- Διακριτός χρόνος και συχνότητα

- Παράθυρο μήκους L

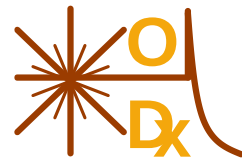
$$w[m] \neq 0 \text{ for } 0 \leq m \leq L-1$$

- N συχνότητες, ομοιόμορφα κατανεμημένες, $\lambda_k = 2\pi k/N$
- Αν $N \geq L$ τότε μπορούμε να ανακτήσουμε το σήμα
 - από n μέχρι $n+L-1$

$$X[n, k] = X[n, 2\pi k/N] = \sum_{m=0}^{L-1} x[n+m]w[m]e^{-j(2\pi/N)km}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$x[n+m]w[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[n, k]e^{j(2\pi/N)km}, \quad 0 \leq m \leq L-1$$

$$x[n+m] = \frac{1}{Nw[m]} \sum_{k=0}^{N-1} X[n, k]e^{j(2\pi/N)km}, \quad 0 \leq m \leq L-1$$



• Διακριτός χρόνος και συχνότητα

$$x[n+m] = \frac{1}{Nw[m]} \sum_{k=0}^{N-1} X[n, k] e^{j(2\pi/N)km}, \quad 0 \leq m \leq L-1$$

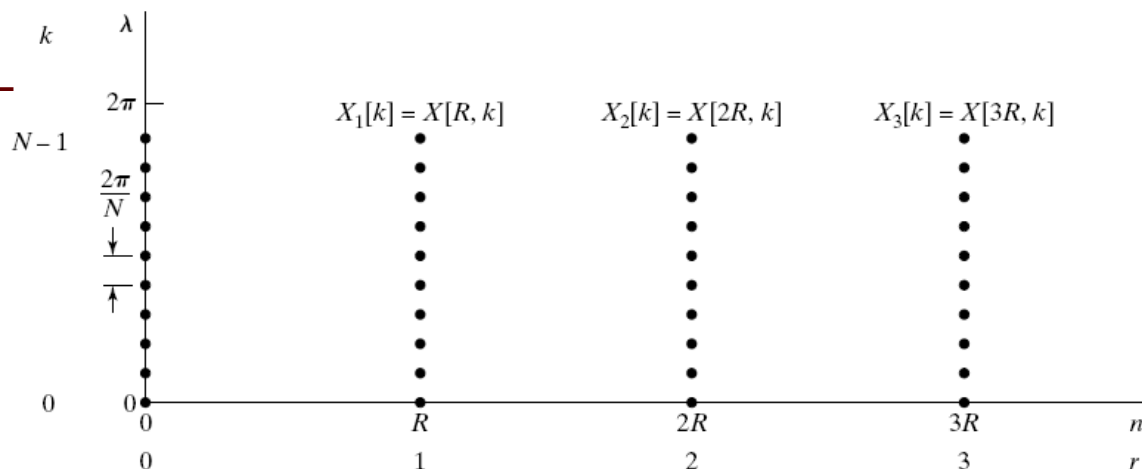
• Μπορούμε να ανακτήσουμε το σήμα

- μεταξύ $n_0 \leq n \leq n_0 + L - 1$ από το $X[n_0, k]$.
- μεταξύ $n_0 + L \leq n \leq n_0 + 2L - 1$ από το $X[n_0 + L, k]$. κλπ

• Άρα

$$X[rR, k] = X[rR, 2\pi k/N] = \sum_{m=0}^{L-1} x[rR+m]w[m]e^{-j(2\pi/N)km}$$

- Για $N \geq L \geq R$
- Και όχι για $L > N, R > L$
- Γιατί;



- Διακριτός χρόνος και συχνότητα

- Συνέλιξη στη συχνότητα
 - Σειρά από φίλτρα (Filter bank)
- Μπορούμε να ανακτήσουμε το σήμα αν ισχύουν όσα είδαμε πιο πριν

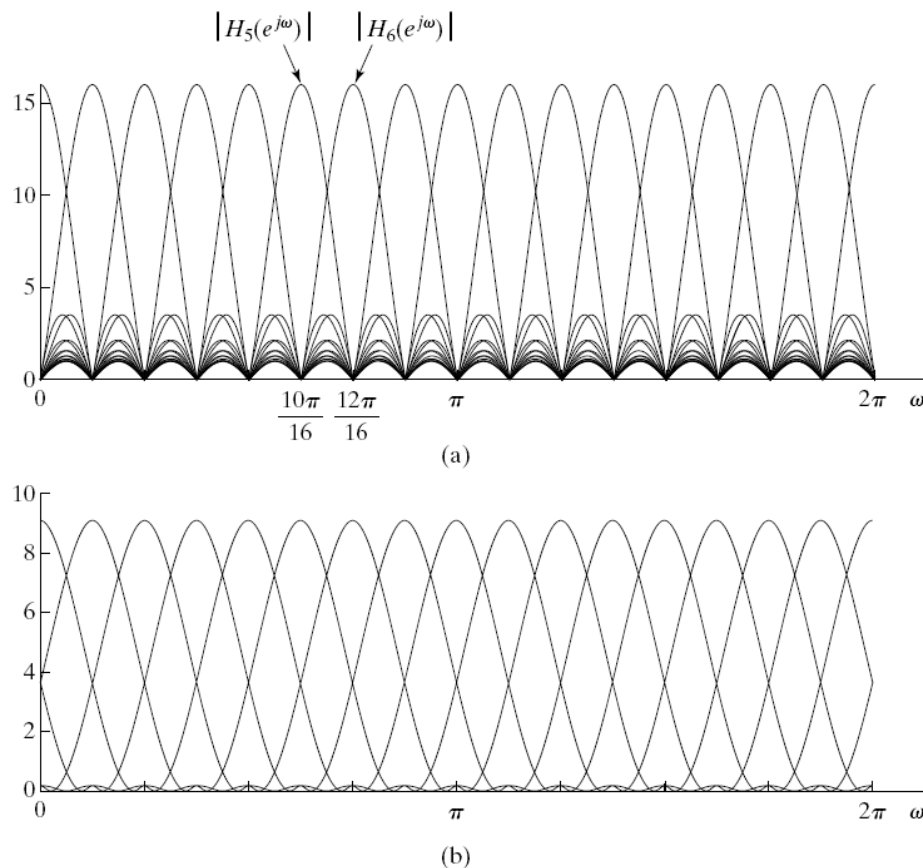


Figure 10.16 Filterbank frequency response. (a) Rectangular window. (b) Kaiser window.

• Παράδειγμα

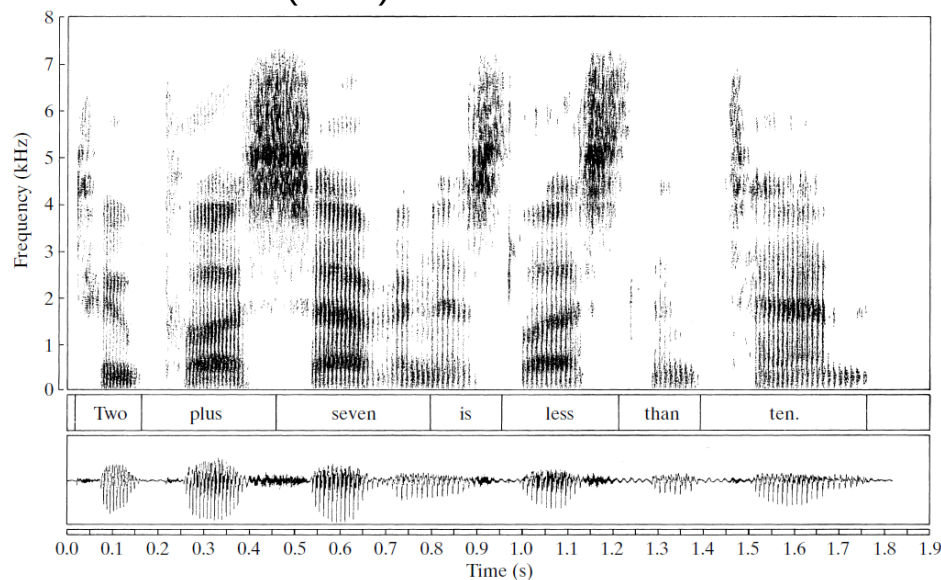
- Ανάλυση σημάτων από φωνή

Wideband

$f_s = 16\text{kHz}$

6.7 ms Hamming window ($L=108$)

$R=16$ (1 ms)



Narrowband

$f_s = 16\text{kHz}$

45 ms Hamming window ($L=720$)

$R=16$ (1 ms)

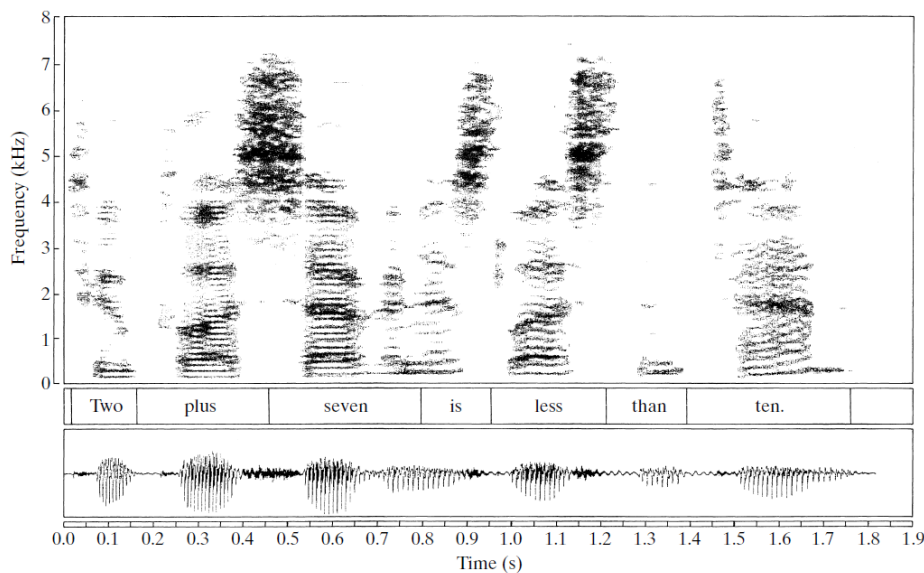
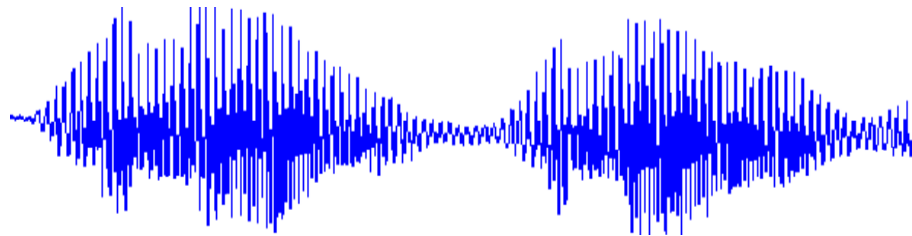


Figure 10.18 (a) Wideband spectrogram of waveform of Figure 10.17.
(b) Narrowband spectrogram.

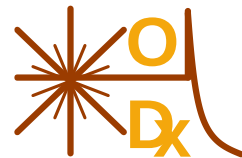
- **ΔΜΦ $\rightarrow$ Φάσμα σήματος**

- Ικανοποιητικά αποτελέσματα
 - Περιοδικά σήματα
 - Ψηλός SNR
- “Θόρυβος”;
 - Περιοδικότητα κρυμμένη στο θόρυβο
 - Σήματα που “μοιάζουν” με θόρυβο
- Προβλήματα στη εκτίμηση του φάσματος



- **Φάσμα Ισχύος (Power Spectrum)**

- Πιο σωστό: φάσμα πυκνότητας ισχύος (power density spectrum)
- Ακόμα: φασματική πυκνότητα ισχύος (power spectral density)
- Χρήσιμο στην ανάλυση τυχαίων σημάτων
- Μπορεί να υπολογιστεί με διάφορους τρόπους
 - Μη-Παραμετρικές Μέθοδοι
 - Παραμετρικές Μέθοδοι



- Υπολογισμός με DFT - Περιοδόγραμμα (Periodogram)

- $P_{xx} \rightarrow$ προσέγγιση P_{ss}

$$P_{xx}(\omega) = \frac{1}{T} P_{ss} \left(\frac{\omega}{T} \right), \quad |\omega| < \pi,$$

$$V(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} w[n]x[n]e^{-j\omega n}$$

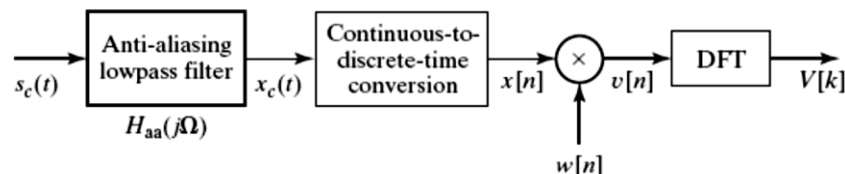
$$I(\omega) = \frac{1}{LU} |V(e^{j\omega})|^2$$

- Υπολογισμός με ΔΜΦ σε συγκεκριμένες συχνότητες

$$I(\omega_k) = \frac{1}{LU} |V[k]|^2$$

$$\omega_k = 2\pi k/N \text{ for } k = 0, 1, \dots, N-1$$

- Περιοδόγραμμα (Periodogram)
 - Τετραγωνικό Παράθυρο
 - Τροποποιημένο Περιοδόγραμμα (Modified Periodogram)
 - Άλλο παράθυρο



- Το U αφαιρεί πόλωση (bias) λόγω του παραθύρου

$$\frac{1}{2\pi LU} \int_{-\pi}^{\pi} |W(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{LU} \sum_{n=0}^{L-1} (w[n])^2 = 1$$

$$U = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} (w[n])^2$$

- Τετραγωνικό Παράθυρο: $U=1$
 - Άλλα Παράθυρα: $0 < U < 1$



- Ιδιότητες του Περιοδογράμματος

- Σχέση με συσχέτιση (correlation)

$$I(\omega) = \frac{1}{LU} \sum_{m=-(L-1)}^{L-1} c_{vv}[m] e^{-j\omega m}$$

$$I(\omega) = \frac{1}{LU} |V(e^{j\omega})|^2$$

- Όπου c_{vv} είναι η μη-περιοδική συσχέτιση (aperiodic correlation) του $v[n]$

$$c_{vv}[m] = \sum_{n=0}^{L-1} x[n]w[n]x[n+m]w[n+m]$$

$$v[n] = w[n]x[n]$$

- **Ιδιότητες του Περιοδογράμματος**

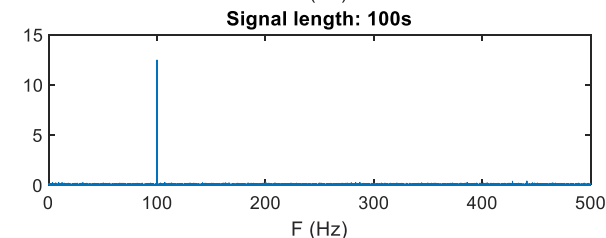
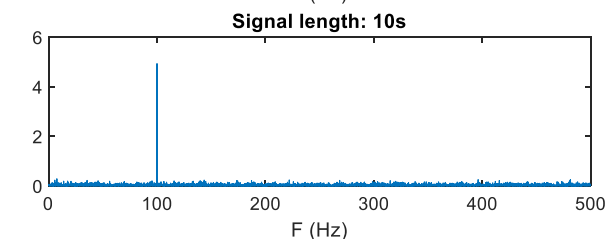
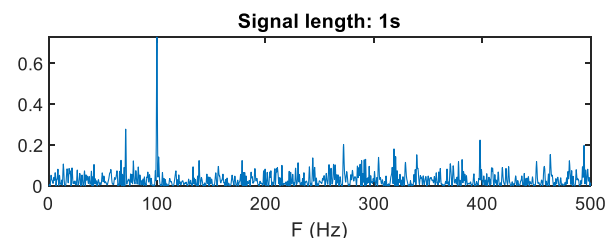
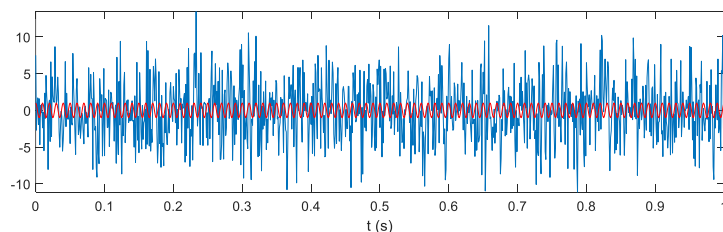
- Σημείωση: $I(\omega)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή (random variable)

- Ασυμπτotικά μη πολωμένο (Asymptotically unbiased)

- Σύγκλιση ως προς την πραγματική τιμή του φάσματος

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \text{var} \left\{ \hat{P}_{\text{per}}(e^{j\omega}) \right\} = 0$$

- δηλ. πόλωση $\rightarrow 0$ με $L \rightarrow \infty$



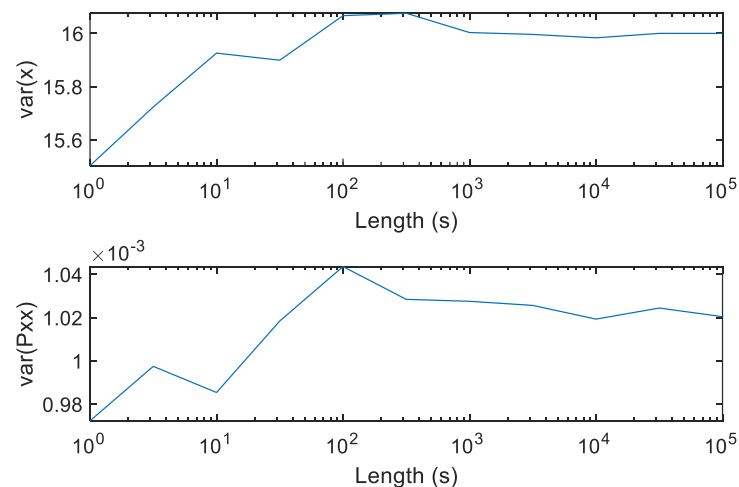
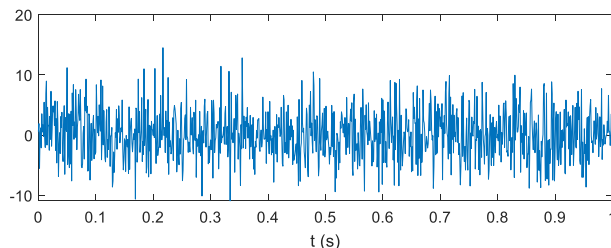
- Ιδιότητες του Περιοδογράμματος

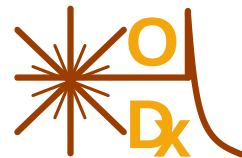
- Μη-Συνεπής (Non-Consistent)

- Η εκτίμηση δεν γίνεται καλύτερη με μεγαλύτερο N

$$\text{var}[I(\omega)] \simeq P_{xx}^2(\omega)$$

- $\text{var}[I(\omega)] > 0$ ακόμα και με $N \rightarrow \infty$





• Παράδειγμα

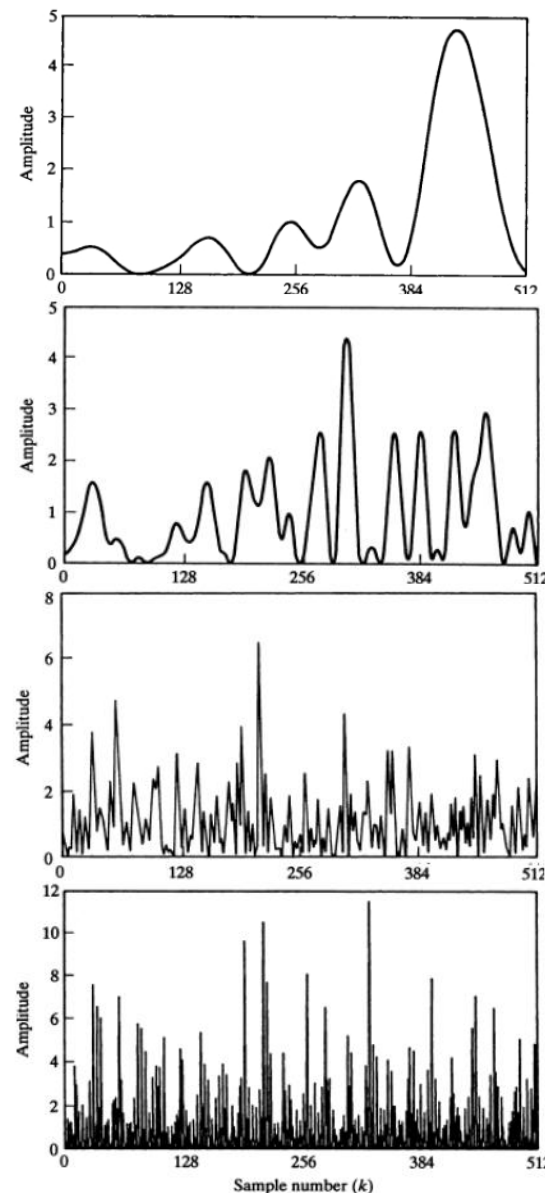
- $x[n]$ σειρά από τυχαίους αριθμούς με ομοιόμορφη κατανομή (uniform distribution)

$$|x[n]| \leq \sqrt{3}$$

- Θεωρητικά

$$P_{xx}(\omega) = \sigma_x^2 = 1 \text{ for all } \omega$$

- ΔΜΦ ($N_{\text{FFT}}=1024$) για $N=16, 64, 256, 1024$
 - Τετραγωνικό Παράθυρο ($U=1$)

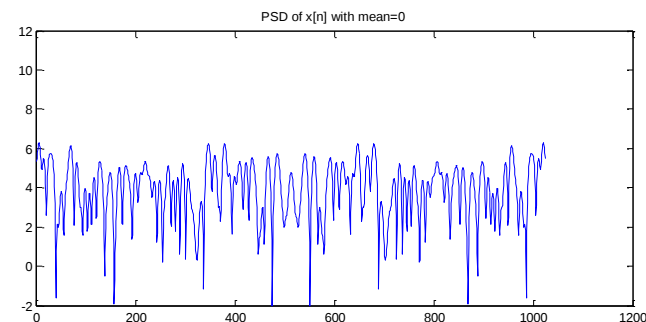
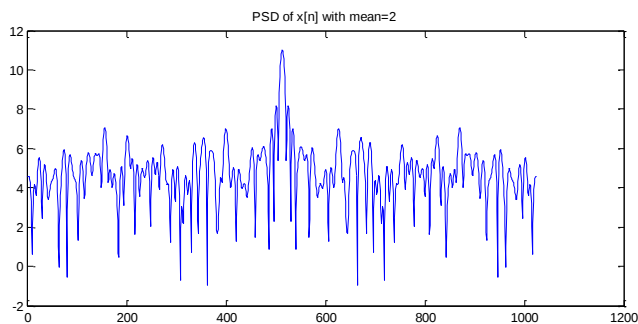
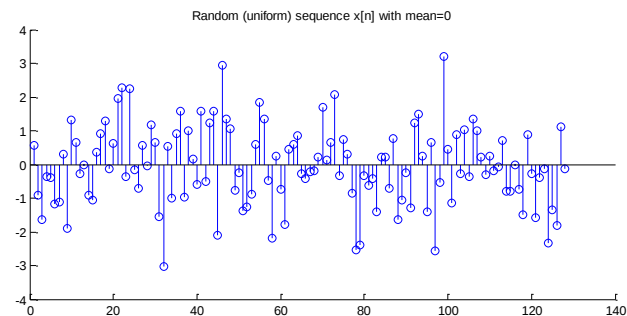
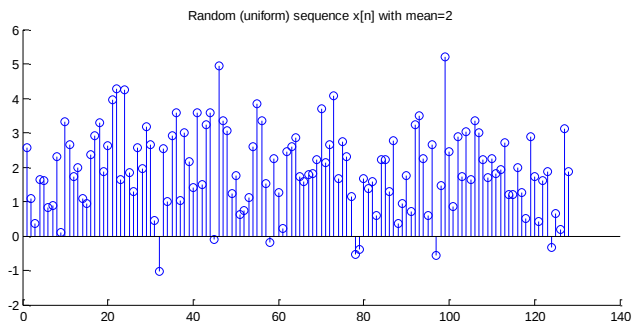


- Προβλήματα με το περιοδόγραμμα

- Πολωμένο (biased) σήμα

- Κορυφή στη συχνότητα 0
 - Μπορεί να είναι τόσο μεγάλη που να επισκιάσει άλλα κοντινά σήματα
 - Αφαιρούμε εκτίμηση του μέσου όρου πριν το ΔΜΦ

$$\hat{m}_x = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x[n]$$

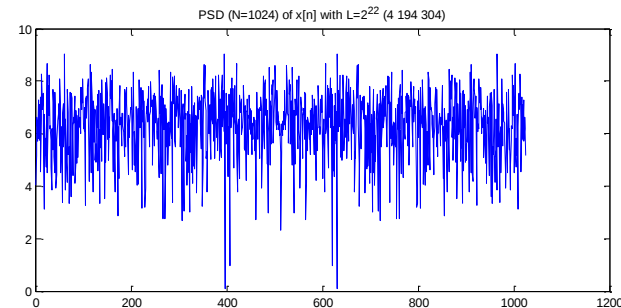
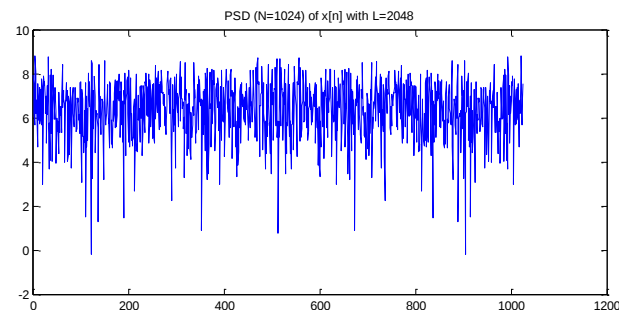
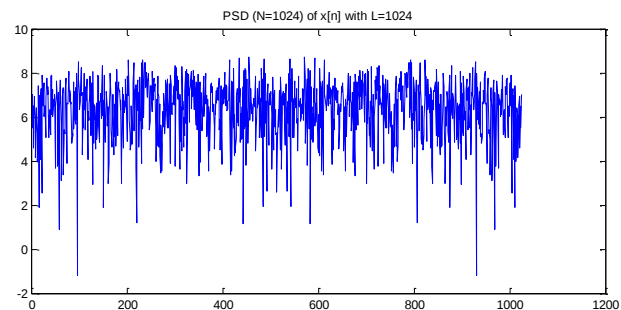
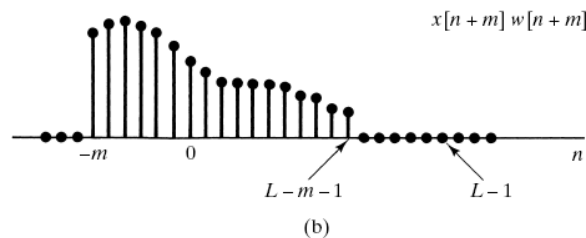
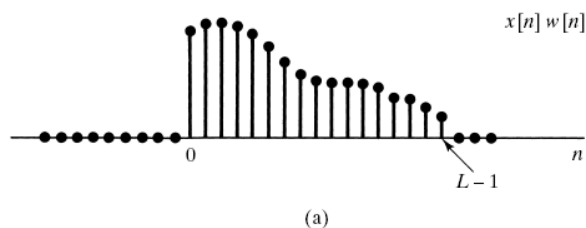


- Προβλήματα με το περιοδόγραμμα

- Διακυμάνσεις σε όλες τις συχνότητες
 - Μεταβολές στις τιμές της συσχέτισης όταν δεν υπάρχει μεγάλη επικάλυψη
 - Δεν βελτιώνεται με μεγαλύτερο L

$$I(\omega) = \frac{1}{LU} \sum_{m=-(L-1)}^{L-1} c_{vv}[m] e^{-j\omega m}$$

$$c_{vv}[m] = \sum_{n=0}^{L-1} x[n]w[n]x[n+m]w[n+m]$$



- Μέσος Όρος Περιοδογράμματος (Periodogram averaging)

- Σήμα μήκους Q
- K τμήματα μήκους L κατά διαστήματα μήκους R

$$x[n], 0 \leq n \leq Q-1$$

$$x_r[n] = x[rR + n]w[n], \quad 0 \leq n \leq L-1$$

$$I_r(\omega) = \frac{1}{LU} |X_r(e^{j\omega})|^2$$

$$\bar{I}(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{r=0}^{K-1} I_r(\omega)$$

- $R < L$ τα τμήματα επικαλύπτονται
- $R = L$ τα τμήματα είναι συνεχή
- Μειώνεται η διασπορά (variance)

$$\text{var}[\bar{I}(\omega)] \simeq \frac{1}{K} P_{xx}^2(\omega)$$

- Υπολογισμός με ΔΜΦ

$$I_r[k] = I_r(\omega_k) = \frac{1}{LU} |X_r[k]|^2 \quad \bar{I}[k] = \bar{I}(\omega_k) = \frac{1}{K} \sum_{r=0}^{K-1} I_r[k]$$

- Μέθοδος Bartlett

- Μέσος όρος με τετράγωνο παράθυρο

$$C_{ww}(e^{j\omega}) = |W(e^{j\omega})|^2$$

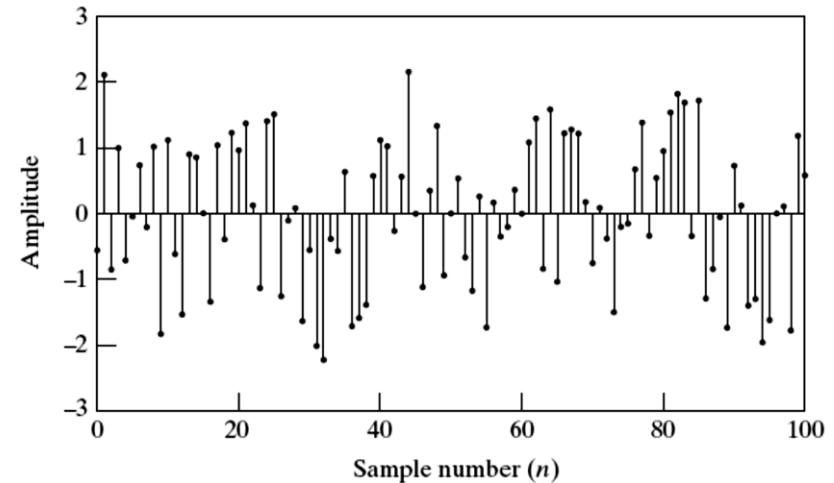
$$C_{ww}(e^{j\omega}) = \left(\frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} \right)^2$$

- Για $K \uparrow$
 - Αυξάνεται το εύρος (width) του κεντρικού λοβού
 - Μειώνεται το πλάτος (amplitude) του κεντρικού λοβού
- Για σταθερό Q
 - Όσο αυξάνεται το L μειώνεται το K
 - Για καλύτερα αποτελέσματα πρέπει να αυξηθεί το Q

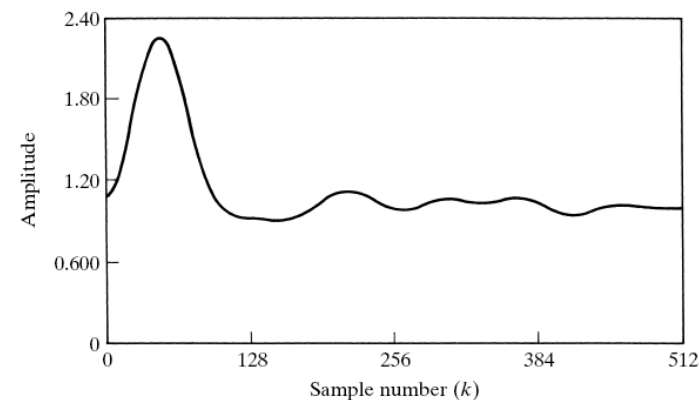
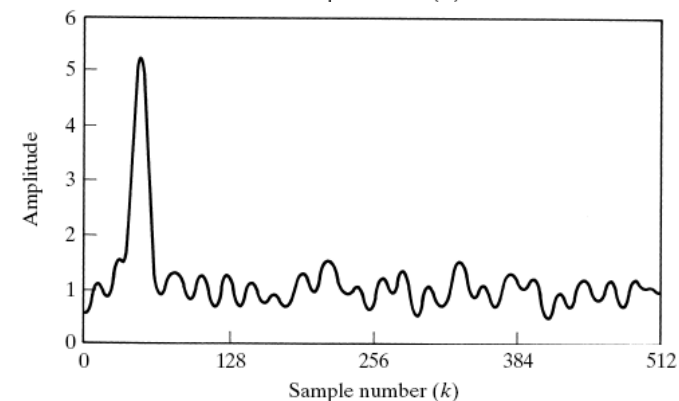
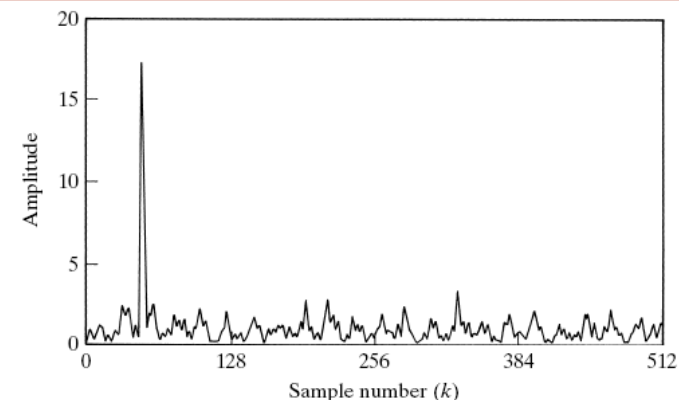
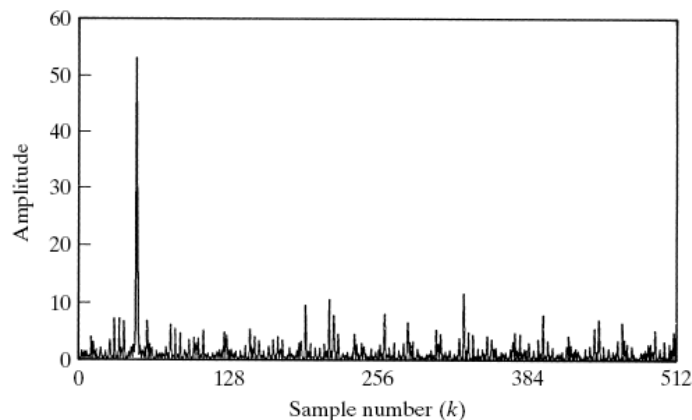
- Μέσος Όρος Περιοδογράμματος
(Periodogram averaging)

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \theta) + e[n]$$

- $A=0.5$, $\omega_0=2\pi/21$
- $0 \leq \theta < 2\pi$ τυχαία
- $-\sqrt{3} \leq e[n] < \sqrt{3}$, ομοιόμορφη κατανομή
 - $\sigma_e^2 = 1$
- Τετραγωνικό παράθυρο
- $f_s = 1$ Hz
- $Q = 1024$
- $L = 1024, 256, 64, 16$
- $K = 1, 7, 31, 127$ (επικάλυψη $L/2$ για τα τρία τελευταία)
- $N_{\text{fft}} = 1024$



- Μέσος Όρος Περιοδογράμματος (Periodogram averaging)
 - $Q = 1024$
 - $L = 1024, 256, 64, 16$
 - $K = 1, 7, 31, 127$ (επικάλυψη $L/2$ για τα τρία τελευταία)
 - $N_{\text{fft}} = 1024$



• Φάσμα Ισχύος από αυτοσυσχέτιση (autocorrelation)

- Ακόμα ένας τρόπος να αποφευχθούν τα προβλήματα του περιοδογράμματος
 - Όχι κατ' ανάγκη καλύτερος τρόπος
 - Βολικός όταν χρειάζεται και η αυτοσυσχέτιση για άλλους λόγους

$$v[n] = \begin{cases} x[n] & \text{for } 0 \leq n \leq Q-1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$I(\omega) = \frac{1}{LU} \sum_{m=-(L-1)}^{L-1} c_{vv}[m] e^{-j\omega m}$$

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{xx}[m] = \frac{1}{Q} c_{vv}[m] &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{Q} |V(e^{j\omega})|^2 = I(\omega) \\ &= \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \hat{\phi}_{xx}[m] w_c[m] e^{-j\omega m} \end{aligned}$$

- Μπορούμε να επιλέξουμε 2M-1μήμα του φ
 - Αποφεύγουμε τις διακυμάνσεις στη συχνότητα
 - Εξομάλυνση του φάσματος λόγω συνέλιξης με παράθυρο

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I(\theta) W_c(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

- Το Φάσμα Ισχύος πρέπει να είναι θετικό για όλα τα k

$$W_c(e^{j\omega}) \geq 0 \quad \text{for } -\pi < \omega \leq \pi$$

- Ισχύει μόνο για τριγωνικό παράθυρο (Bartlett window)
- Ευκρίνεια και διασπορά
 - Εξαρτώνται από το μήκος του παράθυρου όπως και πριν
 - $Q \uparrow$ για καλύτερα αποτελέσματα

- Φάσμα Ισχύος από αυτοσυσχέτιση (autocorrelation)

$$\hat{\phi}_{xx}[m] = \frac{1}{Q} \sum_{n=0}^{Q-|m|-1} x[n]x[n+|m|]$$

- Υπολογισμός με ΔΜΦ

1. (M-1) μηδενικά στο τέλος του x[n] (για να αποφύγετε την αναδίπλωση)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi/N)kn} \quad \text{for } k = 0, 1, \dots, N-1$$

2. ΔΜΦ

$$|X[k]|^2 = X[k]X^*[k] \quad \text{for } k = 0, 1, \dots, N-1$$

3. |X(k)|²

$$\tilde{c}_{vv}[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2 e^{j(2\pi/N)km} \quad \text{for } m = 0, 1, \dots, N-1$$

4. Αντίστροφος ΔΜΦ

$$\hat{\phi}_{xx}[m] = \frac{1}{Q} \tilde{c}_{vv}[m] \quad \text{for } m = 0, 1, \dots, M-1$$

5. Δια Q

$$s[m] = \begin{cases} \hat{\phi}_{xx}[m]w_c[m], & 0 \leq m \leq M-1, \\ 0, & M \leq m \leq N-M, \\ \hat{\phi}_{xx}[N-m]w_c[N-m], & N-M+1 \leq m \leq N-1 \end{cases}$$

6. Πολλαπλασιασμός με παράθυρο

$$c_{vv}[-m] = c_{vv}[m]$$

7. ΔΜΦ

$$S[k] = S(\omega)|_{\omega=2\pi k/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

• Μοντέλο Αυτοπαλλινδρόμησης (Autoregressive Model)

- Εκτίμηση (estimation) με αυτοπαλλινδρόμηση
 - Σήμα που “μοιάζει” με θόρυβο
 - Εκτίμηση με βάση k προηγούμενες τιμές και μια τυχαία σειρά $e[m]$
- Συντελεστές a_k
 - Ο αριθμός εξαρτάται από το σήμα
 - “Αρκετοί” ώστε το φάσμα να ανταποκρίνεται στο πραγματικό
 - Όχι υπερβολικοί γιατί μετά έχουμε θόρυβο
 - Διάφορες μέθοδοι υπολογισμού
 - Π.χ. Μέθοδος Burg
 - Ελαχιστοποίηση (ελάχιστα τετράγωνα) του σφάλματος
- Εκτίμηση του Φάσματος Ισχύος
 - Από τους συντελεστές a_k
 - Ποιο κοντά στο πραγματικό για σήματα μικρής διάρκειας



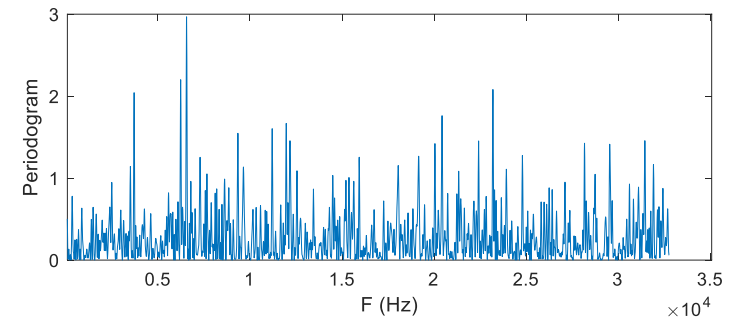
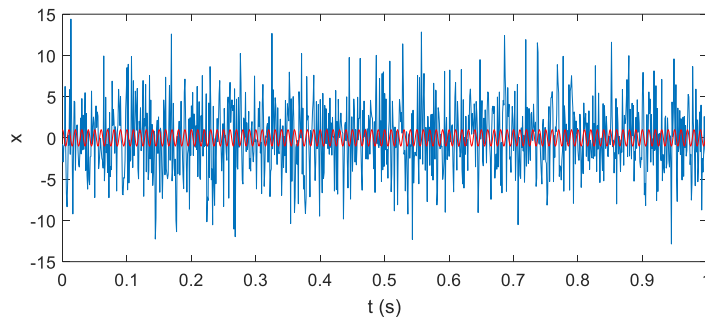
$$x[m] = e[m] + \sum_{k=1}^p a_k x[m-k]$$

$$y[m] = x[m] + n[m]$$

$$y[m] = \sum_{k=1}^p a_k x[m-k] + e[m] + n[m]$$

$$P_{xx}^{AR} = \frac{\hat{\sigma}_x^2}{\left| 1 - \sum_{k=1}^p \hat{a}_k e^{-j2\pi f k} \right|^2}$$

- Μοντέλο Αυτοπαλλινδρόμησης (Autoregressive Model)



$$p_{xx}^{AR} = \frac{\hat{\sigma}_x^2}{\left| 1 - \sum_{k=1}^p \hat{a}_k e^{-j2\pi f k} \right|^2}$$

