



Διαλέξεις 19 & 20

Μετασχηματισμός Hilbert και ανάλυση AM-FM

Κεφ. 11 (εκτός 11.0 και 11.4.1)

- Για κάθε συνάρτηση ισχύει

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

$$x_e[n] = \frac{x[n] + x[-n]}{2}$$

$$x_o[n] = \frac{x[n] - x[-n]}{2}$$

- Αν η συνάρτηση είναι αιτιατή (causal)

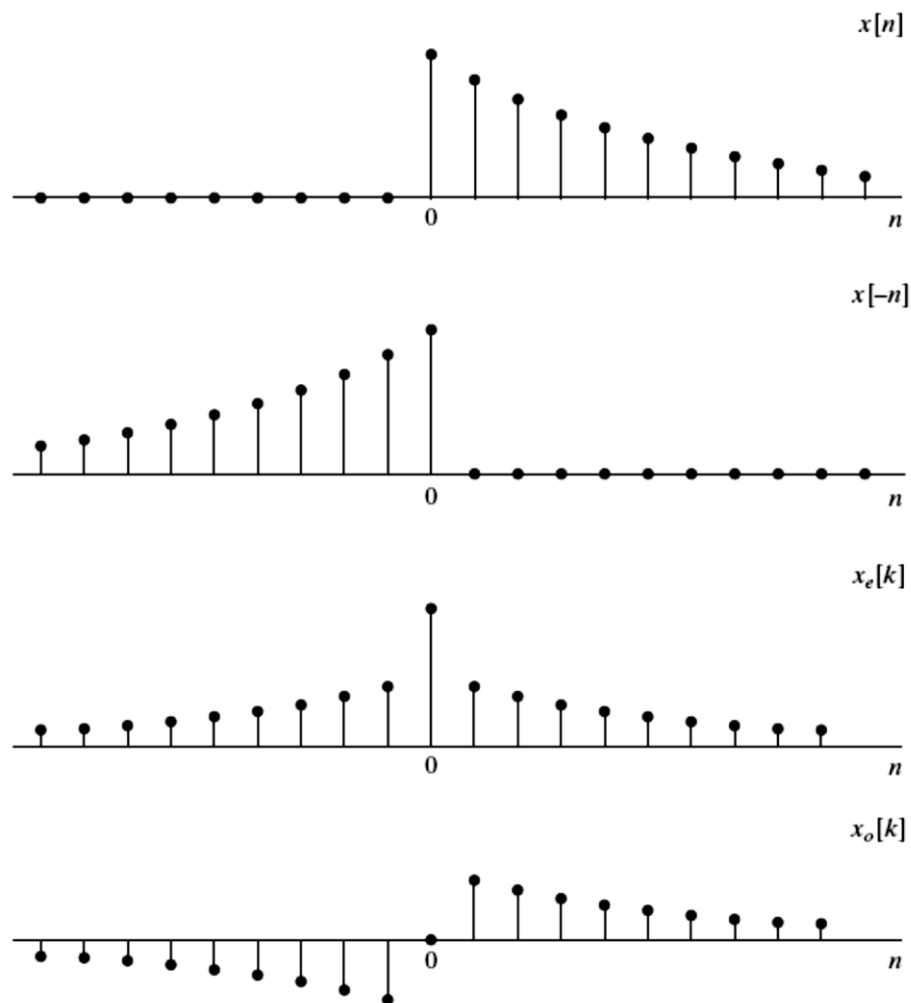
$$x[n] = 0, n < 0$$

$$x[n] = 2x_e[n]u[n] - x_e[0]\delta[n]$$

$$x[n] = 2x_o[n]u[n] + x[0]\delta[n]$$

- Η συνάρτηση $x[n]$ καθορίζεται

- πλήρως από το $x_e[n]$
- από το $x_o[n]$ για $n \neq 0$



- Αν η συνάρτηση είναι και σταθερή (stable)

- Μπορούμε να βρούμε το ΜΦΔΧ

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

- Όπου

$$X_R(e^{j\omega}) = \mathfrak{I}\{x_e[n]\}$$

$$jX_I(e^{j\omega}) = \mathfrak{I}\{x_o[n]\}$$

- Αν έχουμε το $X_R(e^{j\omega})$ τότε μπορούμε να βρούμε το $X(e^{j\omega})$

$$x_e[n] = \mathfrak{I}^{-1}\{X_R(e^{j\omega})\}$$

$$x[n] = 2x_e[n]u[n] - x_e[0]\delta[n]$$

$$X(e^{j\omega}) = \mathfrak{I}\{x[n]\}$$

- Αλλά και το $X_I(e^{j\omega})$

$$X_I(e^{j\omega}) = \text{Im}\{X(e^{j\omega})\} = \text{Im}\{\mathfrak{I}\{x[n]\}\}$$

- Στο πεδίο της συχνότητας

$$x[n] = 2x_e[n]u[n] - x_e[0]\delta[n]$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta}) U(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta - x[0]$$

$$U(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega - 2\pi k) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{1}{2} - \frac{j}{2} \cot\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$U(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega - 2\pi k) + \frac{1}{2} - \frac{j}{2} \cot\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

$$= X_R(e^{j\omega}) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta}) d\theta$$

$$- \frac{j}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta}) \cot\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) d\theta - x[0]$$

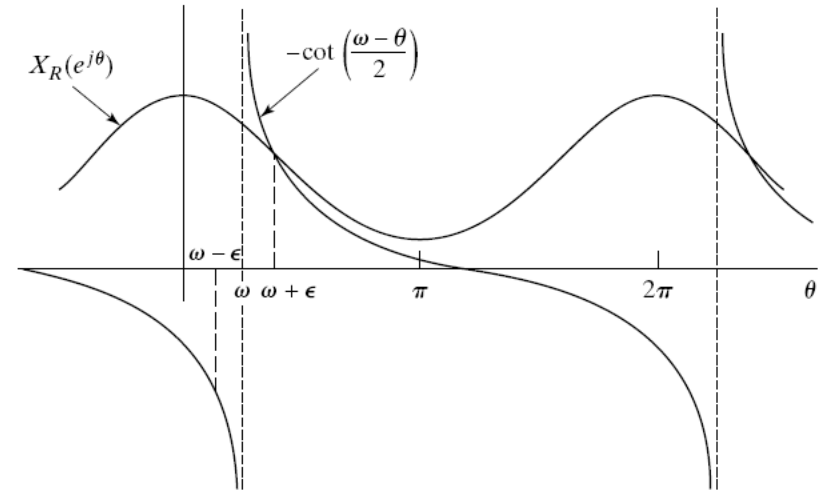
$$x[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta}) d\theta$$

- Διακριτός Μετασχηματισμός Hilbert (Discrete Hilbert Transform)

$$X_I(e^{j\omega}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta}) \cot\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) d\theta$$

$$X_R(e^{j\omega}) = x[0] + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_I(e^{j\theta}) \cot\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) d\theta$$

For causal, stable, real sequence



- Instability at $\omega \rightarrow \theta$
 - Πρωτεύουσες τιμές Cauchy (Cauchy principal values)

$$X_R(e^{j\omega}) = x[0] + \frac{1}{2\pi} \mathcal{P} \int_{-\pi}^{\pi} X_I(e^{j\theta}) \cot\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) d\theta$$

$$X_I(e^{j\omega}) = -\frac{1}{2\pi} \mathcal{P} \int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta}) \cot\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) d\theta$$

$$X_I(e^{j\omega}) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\omega+\epsilon}^{\pi} X_R(e^{j\theta}) \cot\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) d\theta + \int_{-\pi}^{\omega-\epsilon} X_R(e^{j\theta}) \cot\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) d\theta \right]$$

- Συναρτήσεις πεπερασμένου μήκους (finite-length)

- Μια και ο ΔΜΦ υπονοεί περιοδικότητα στο χρόνο

- Περιοδική συνάρτηση: $\tilde{x}[n]$
- Πεπερασμένη συνάρτηση: $x[n]$

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_N]$$

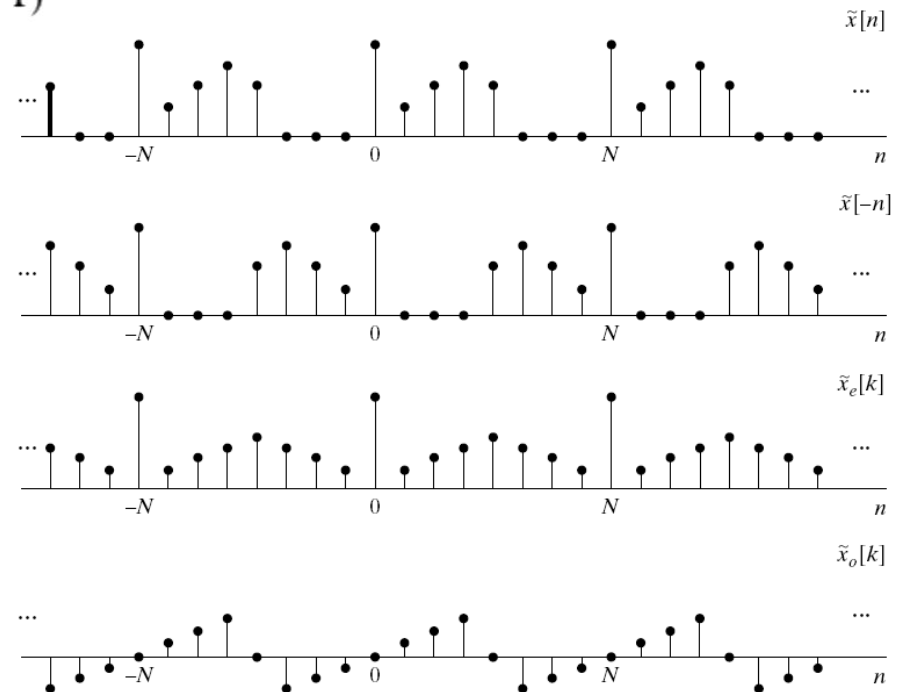
$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}_e[n] + \tilde{x}_o[n], \quad n = 0, 1, \dots, (N-1)$$

$$\tilde{x}_e[n] = \frac{\tilde{x}[n] + \tilde{x}[-n]}{2}$$

$$\tilde{x}_o[n] = \frac{\tilde{x}[n] - \tilde{x}[-n]}{2}$$

- Περιοδικά αιτιατή συνάρτηση

$$\tilde{x}[n] = 0 \text{ for } N/2 < n < N$$



- Συναρτήσεις πεπερασμένου μήκους (finite-length)

- Περιοδικά αιτιατή συνάρτηση

$$\tilde{x}[n] = 0 \text{ for } N/2 < n < N$$

$$\tilde{x}[n] = \begin{cases} 2\tilde{x}_e[n], & n = 1, 2, \dots, (N/2) - 1, \\ \tilde{x}_e[n], & n = 0, N/2, \\ 0, & n = (N/2) + 1, \dots, N - 1 \end{cases}$$

$$\tilde{u}_N[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, N/2, \\ 2, & n = 1, 2, \dots, (N/2) - 1, \\ 0, & n = (N/2) + 1, \dots, N - 1 \end{cases}$$

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}_e[n]\tilde{u}_N[n]$$

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}_o[n]\tilde{u}_N[n] + x[0]\tilde{\delta}[n] + x[N/2]\tilde{\delta}[n - (N/2)]$$

- Στο πεδίο της συχνότητας

$$\begin{aligned} \tilde{X}[k] &= \tilde{X}_R[k] + j\tilde{X}_I[k] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{X}_R[m]\tilde{U}_N[k-m] \end{aligned}$$

$$\tilde{U}_N[k] = \begin{cases} N, & k = 0, \\ -j2 \cot(\pi k/N), & k \text{ odd}, \\ 0, & k \text{ even} \end{cases}$$

$$\tilde{V}_N[k] = \begin{cases} -j2 \cot(\pi k/N), & k \text{ odd}, \\ 0, & k \text{ even} \end{cases}$$

$$\tilde{X}[k] = \tilde{X}_R[k] + \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{X}_R[m]\tilde{V}_N[k-m]$$

$$j\tilde{X}_I[k] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{X}_R[m]\tilde{V}_N[k-m]$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_R[k] &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} j\tilde{X}_I[m]\tilde{V}_N[k-m] \\ &\quad + \tilde{x}[0] + (-1)^k \tilde{x}[N/2] \end{aligned}$$

- Συναρτήσεις πεπερασμένου μήκους (finite-length)

- Μη περιοδική συνάρτηση

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\tilde{V}_N[k] = \begin{cases} -j2 \cot(\pi k/N), & k \text{ odd,} \\ 0, & k \text{ even} \end{cases}$$

$$jX_I[k] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_R[m] V_N[k-m], & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$X_R[k] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} jX_I[m] V_N[k-m] + x[0] + (-1)^k x[N/2], & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- Αν έχουμε το $X_R(e^{j\omega})$ τότε μπορούμε να βρούμε το $X(e^{j\omega})$

$$\text{inverse DFT of } X_R[k] = x_{ep}[n] = \frac{x[n] + x[((-n))_N]}{2}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$x[n] = \begin{cases} x_{ep}[0], & n = 0, \\ 2x_{ep}[n], & 0 < n < N/2, \\ x_{ep}[N/2], & n = N/2, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$X(e^{j\omega}) = \mathfrak{I}\{x[n]\} = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

- Σχέση μεταξύ πλάτους (amplitude) και φάσης (phase)

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\arg[X(e^{j\omega})]}$$

- $\hat{X}$ = μιγαδικό “αφσμα” ☺ (Complex cepstrum)

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \log[X(e^{j\omega})] = \log|X(e^{j\omega})| + j\arg[X(e^{j\omega})]$$

$$\hat{x}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \hat{X}(e^{j\omega})$$

- Αν το μιγαδικό cepstrum είναι αιτιατό (causal)

$$\log|X(e^{j\omega})| = \hat{x}[0] + \frac{1}{2\pi} \mathcal{P} \int_{-\pi}^{\pi} \arg[X(e^{j\theta})] \cot\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) d\theta$$

$$\arg[X(e^{j\omega})] = -\frac{1}{2\pi} \mathcal{P} \int_{-\pi}^{\pi} \log|X(e^{j\theta})| \cot\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) d\theta$$

$$\hat{x}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log|X(e^{j\omega})| d\omega$$

• Μιγαδικά Σήματα (Complex signals)

- Αναλυτικά Σήματα (analytic signals): μιγαδικά σήματα χωρίς αρνητικές συχνότητες
- “Αιτιατός” ΜΦΔΧ $\rightarrow$ μονόπλευρος ΜΦΔΧ

$$x[n] = x_r[n] + j x_i[n]$$

$$X(e^{j\omega}) = 0, \quad -\pi \leq \omega < 0.$$

$$X(e^{j\omega}) = X_r(e^{j\omega}) + j X_i(e^{j\omega})$$

$$X_r(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})]$$

$$j X_i(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]$$

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2X_r(e^{j\omega}), & 0 \leq \omega < \pi, \\ 0, & -\pi \leq \omega < 0, \end{cases}$$

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2j X_i(e^{j\omega}), & 0 \leq \omega < \pi, \\ 0, & -\pi \leq \omega < 0. \end{cases}$$

$$X_i(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j X_r(e^{j\omega}), & 0 < \omega < \pi, \\ j X_r(e^{j\omega}), & -\pi \leq \omega < 0, \end{cases}$$

$$X_i(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X_r(e^{j\omega})$$

$$X_r(e^{j\omega}) = \frac{1}{H(e^{j\omega})} X_i(e^{j\omega}) = -H(e^{j\omega}) X_i(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 0 < \omega < \pi, \\ j, & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 j e^{j\omega n} d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} j e^{j\omega n} d\omega$$

$$h[n] = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{\sin^2(\pi n/2)}{n}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

- **Μιγαδικά Σήματα (Complex signals)**

- Μετασχηματιστής Hilbert (Hilbert Transformer)

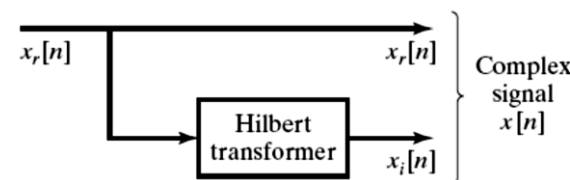
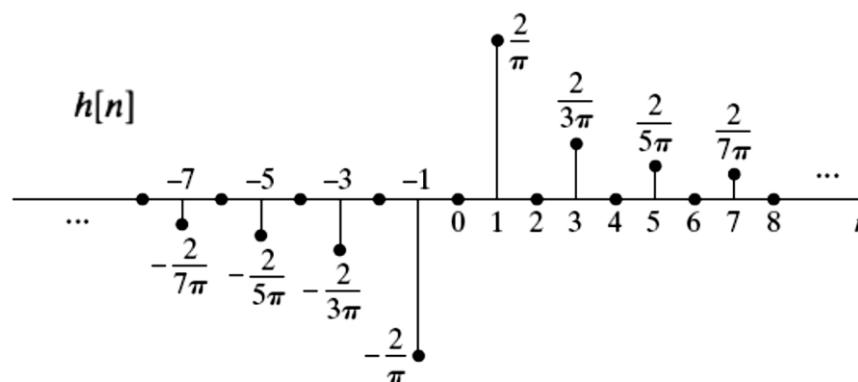
$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 0 < \omega < \pi, \\ j, & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$

$$h[n] = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{\sin^2(\pi n/2)}{n}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

$$x_i[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]x_r[m]$$

$$x_r[n] = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]x_i[m]$$

Ο ιδανικός μετασχηματιστής Hilbert δεν υπάρχει και πρέπει να υλοποιηθεί με FIR φίλτρα



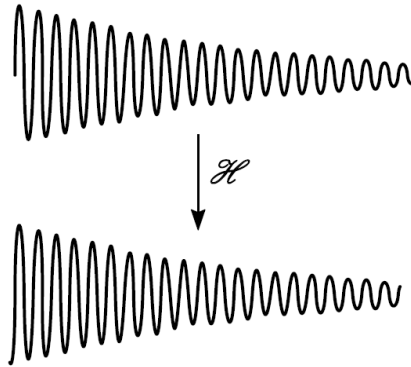
$$x[n] = x_r[n] + jx_i[n]$$

• Εφαρμογές

- Αποδιαμόρφωση (demodulation) και Στιγμιαία Συχνότητα (instantaneous frequency)

$$x_r[n] = A[n] \sin(\omega_d n)$$

$$x_i[n] = \mathfrak{S}\{x_r[n]\} = A[n] \cos(\omega_d n)$$



$$s_a[n] = x_r[n] + jx_i[n] = x_r[n] + j\mathfrak{S}\{x_r[n]\}$$

$$|s_a[n]| = \sqrt{(x_r[n])^2 + (x_i[n])^2} = A[n]$$

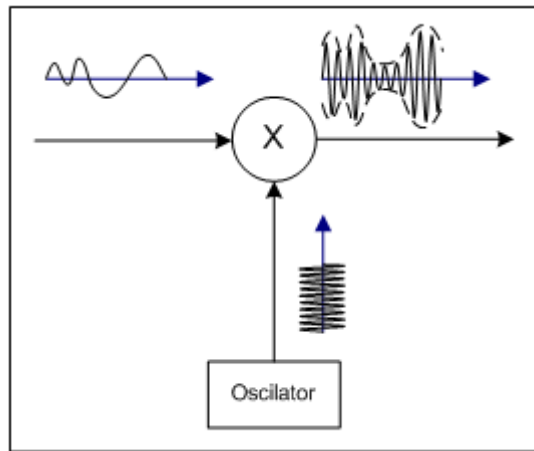


$$\phi[n] = \angle s_a[n] = \arctan\left(\frac{\mathfrak{S}\{x_r[n]\}}{x_r[n]}\right)$$

$$\omega_{inst}[n] = \frac{d}{dn} \phi[n] = \phi[n] - \phi[n-1]$$

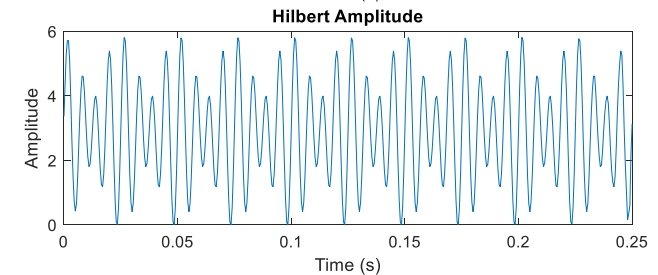
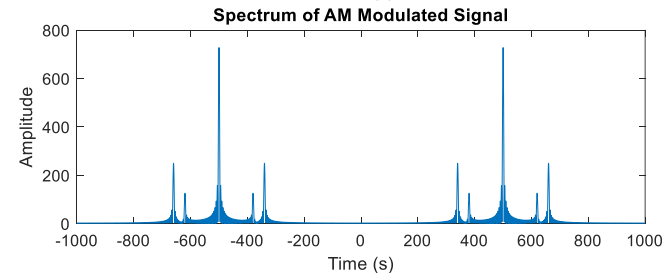
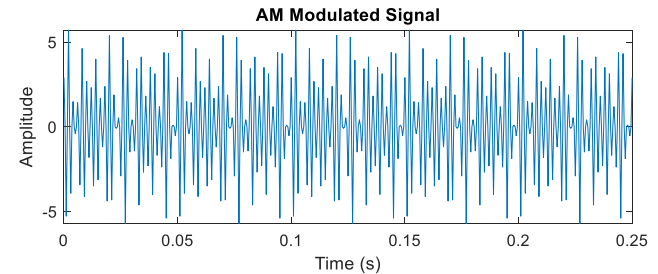
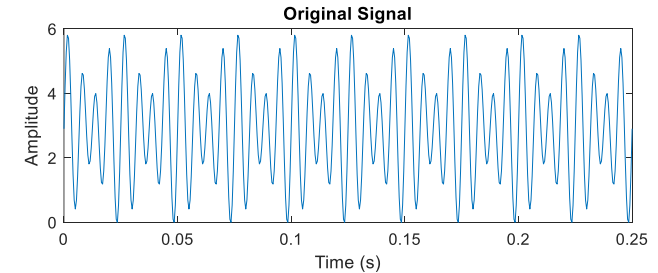
- Εφαρμογές

- Διαμόρφωση AM



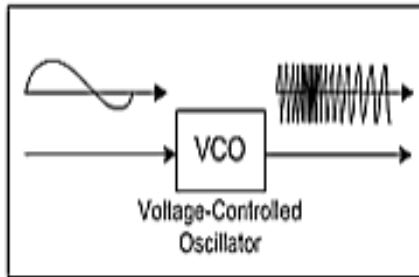
- Αποδιαμόρφωση AM

$$|s_a[n]| = \sqrt{(x_r[n])^2 + (x_i[n])^2} = A[n]$$



- Εφαρμογές

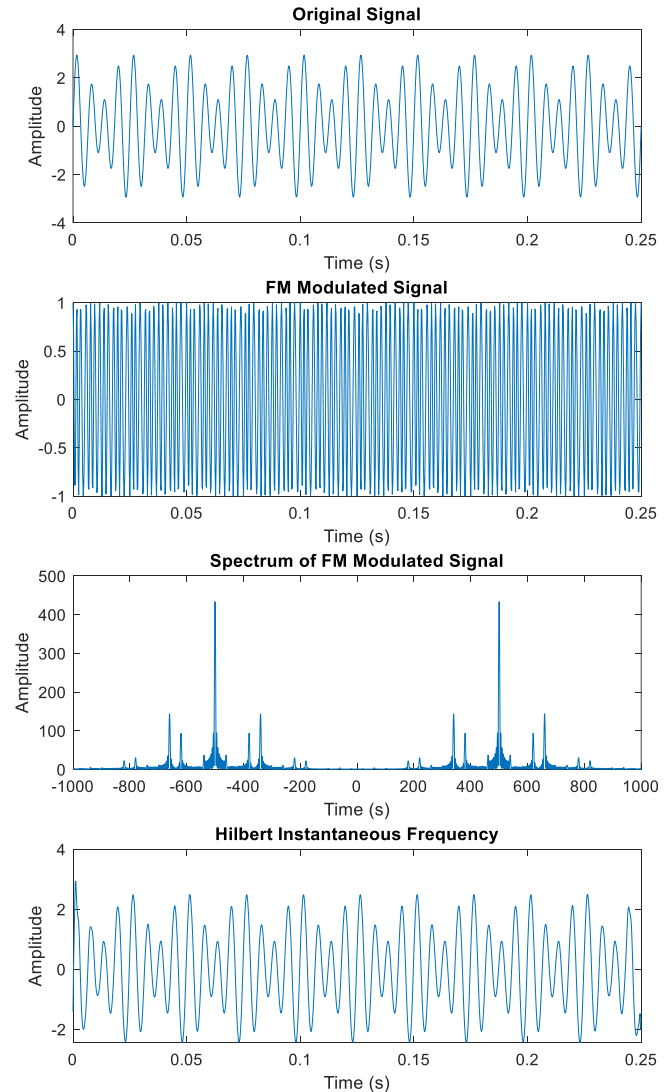
- Διαμόρφωση FM



- Αποδιαμόρφωση FM

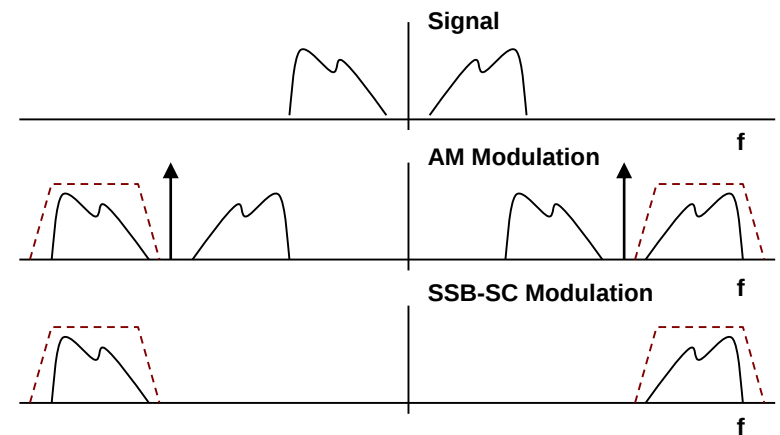
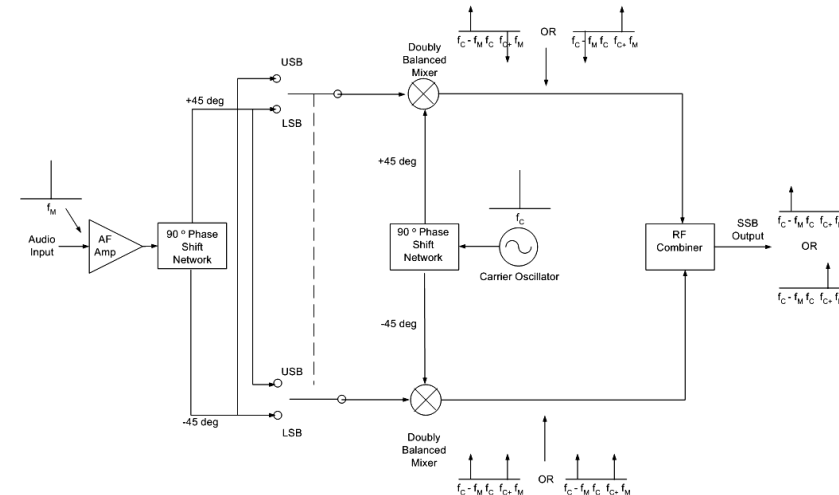
$$\phi[n] = \angle s_a[n] = \arctan \left(\frac{\Re \{x_r[n]\}}{x_r[n]} \right)$$

$$\omega_{inst}[n] = \frac{d}{dn} \phi[n] = \phi[n] - \phi[n-1]$$



• Εφαρμογές

- Διαμόρφωση απλής πλευρικής ζώνης (single side-band modulation)
- Διαμόρφωση πλάτους AM
 - Εύρος ζώνης $\rightarrow$ διπλάσιο του εύρους ζώνης του πληροφοριακού σήματος
 - Άσκοπη σπατάλη ισχύος στο φέρον (carrier)
- Διαμόρφωση SSB
 - Μεταδίδεται μόνο η μία από τις δύο πλευρικές ζώνες
 - Οφέλη από άποψη ισχύος και σπατάλης φάσματος
 - Μειονεκτήματα: πιο πολύπλοκες συσκευές $\rightarrow$ χρήση φίλτρων με απότομα χαρακτηριστικά στις περιοχές αποκοπής $\rightarrow$ δύσκολο να υλοποιηθούν στην πράξη.



• Εφαρμογές

- Ζωνοπερατά Σήματα (bandpass signals)

- Πραγματικά σήματα ($x_r[n]$) $\rightarrow$ Συμμετρικός ΜΦΔΧ
 - Δεν “χρειάζονται” οι αρνητικές συχνότητες

- Ζωνοπερατό σήμα απλής πλευρικής ζώνης (single sideband)

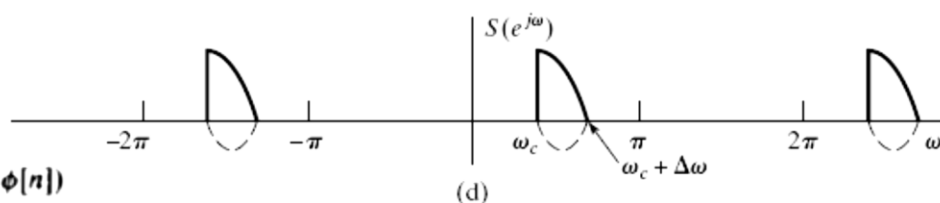
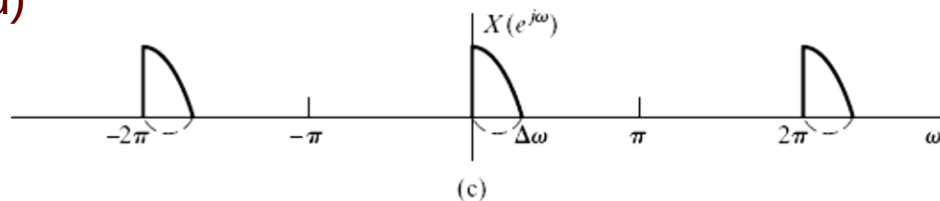
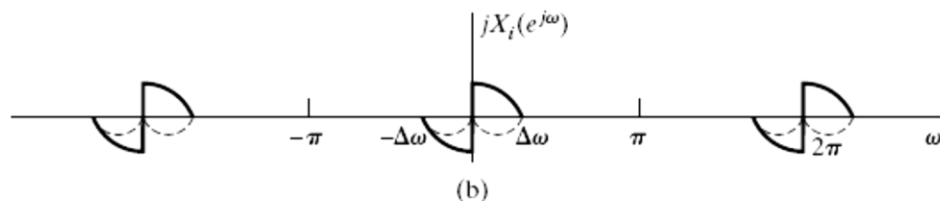
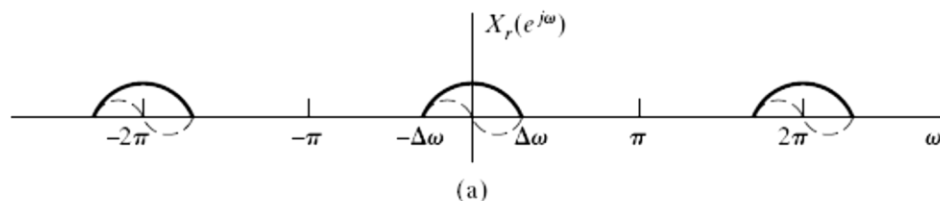
$$x[n] = x_r[n] + j\mathfrak{S}\{x_r[n]\}$$

$$x[n] = A[n]e^{j\phi[n]}$$

$$s[n] = x[n]e^{j\omega_c n} = s_r[n] + js_i[n]$$

$$s[n] = (x_r[n] + jx_i[n])e^{j\omega_c n} = A[n]e^{j(\omega_c n + \phi[n])}$$

$$S(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega - \omega_c)})$$



— Πραγματικά (Real)
 --- Φανταστικά (Imaginary)

• Εφαρμογές

- Ζωνοπερατά σήματα απλής πλευρικής ζώνης (single sideband)

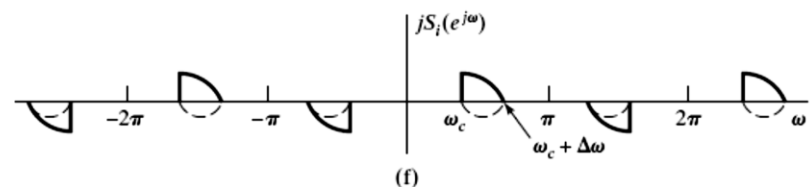
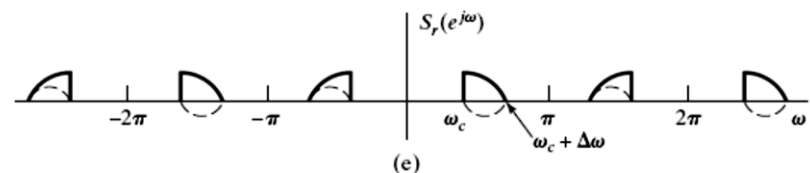
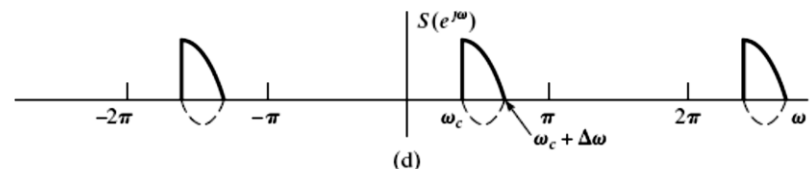
$$s[n] = x[n]e^{j\omega_c n} = s_r[n] + js_i[n]$$

$$s_r[n] = x_r[n] \cos \omega_c n - x_i[n] \sin \omega_c n$$

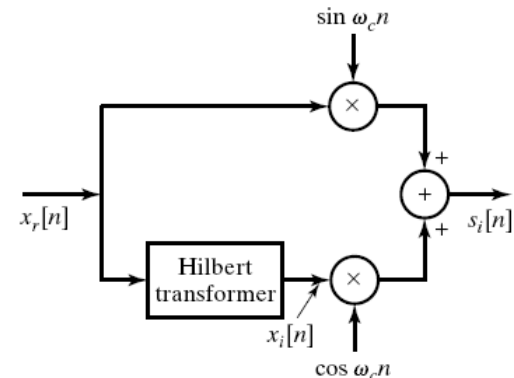
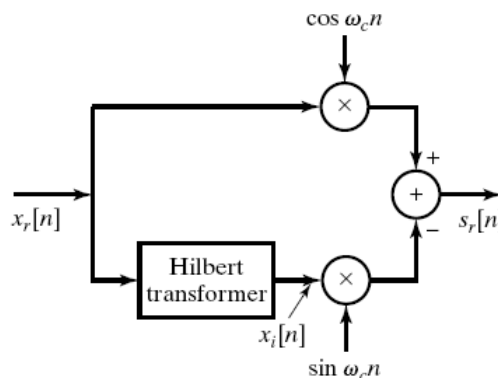
$$s_r[n] = A[n] \cos(\omega_c n + \phi[n])$$

$$s_i[n] = x_r[n] \sin \omega_c n + x_i[n] \cos \omega_c n$$

$$s_i[n] = A[n] \sin(\omega_c n + \phi[n])$$



— Πραγματικά (Real)
 --- Φανταστικά (Imaginary)

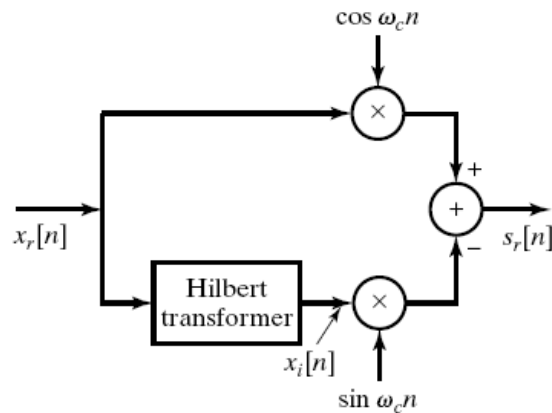


Single Sideband Modulation via the Hilbert Transform

<https://uk.mathworks.com/help/signal/ug/single-sideband-modulation-via-the-hilbert-transform.html>

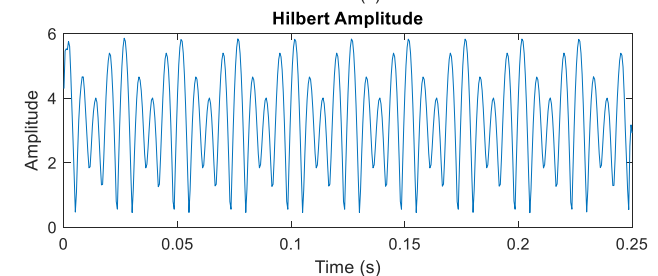
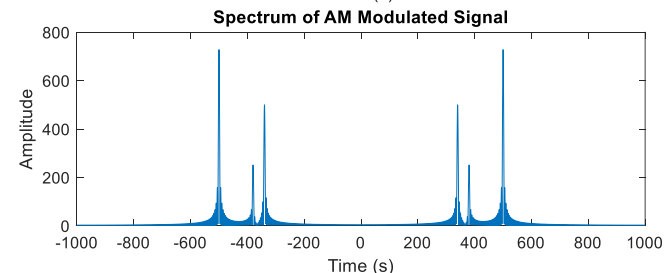
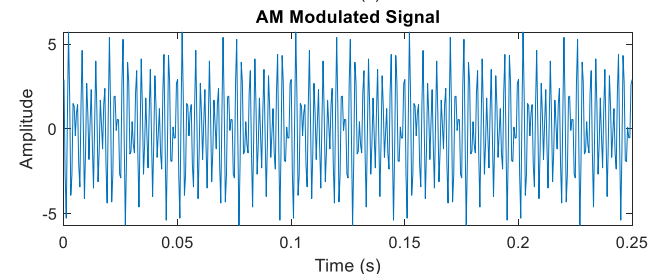
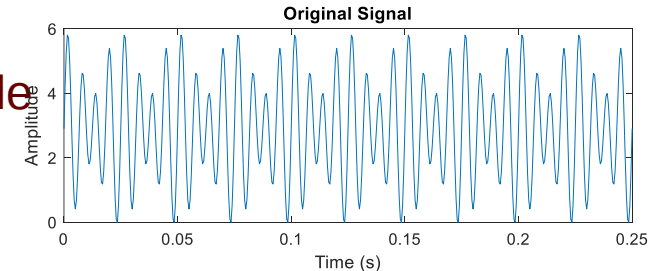
- Εφαρμογές

- Διαμόρφωση απλής πλευρικής ζώνης (single side-band modulation)



- Αποδιαμόρφωση απλής πλευρικής ζώνης (single side-band modulation)

$$|s_a[n]| = \sqrt{(x_r[n])^2 + (x_i[n])^2} = A[n]$$



• Εφαρμογές

- Ψηφιοποίηση ζωνοπερατών (bandpass) σημάτων

- Ψηφιοποίηση του σήματος

1. Ψηφιοποίηση πραγματικού σήματος $s_c(t)$

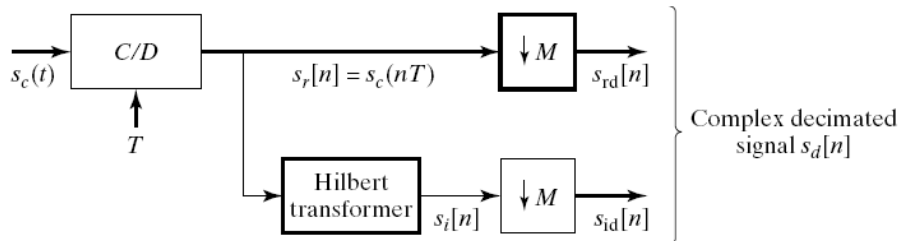
2. Αφαίρεση συμμετρικού μέρους

$$s_d[n] = s_{rd}[n] + js_{id}[n]$$

3. Αποδεκατισμός (decimation)

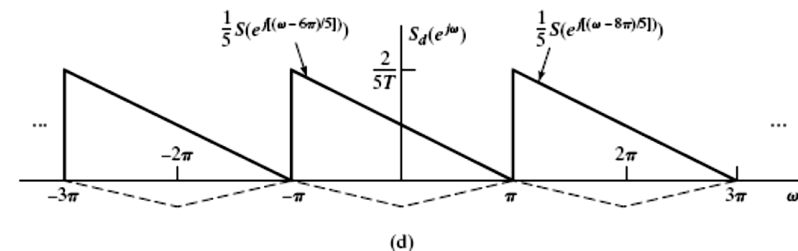
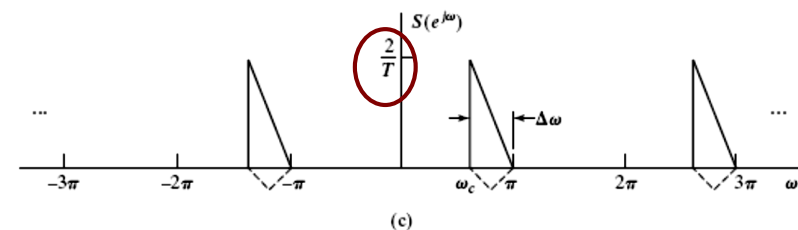
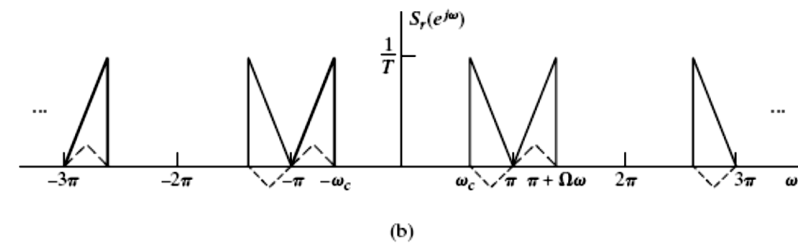
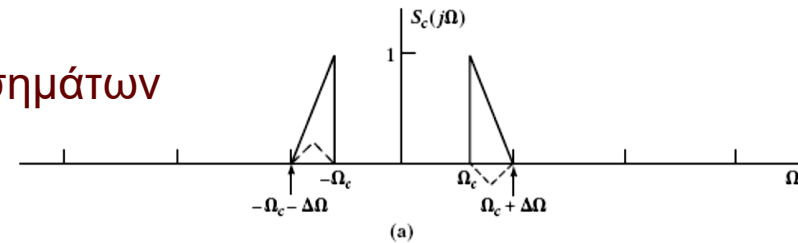
$$s_d[n] = s_{rd}[n] + js_{id}[n] = s[Mn]$$

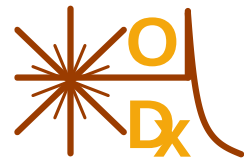
$$S_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} S(e^{j(\omega - 2\pi k)/M})$$



- Πλεονεκτήματα

- Μικρότερο σήμα
- Χωρίς αλλοίωση από αναδίπλωση





- **Εφαρμογές**

- Ψηφιοποίηση ζωνοπερατών (bandpass) σημάτων

- Ανάκτηση του σήματος

1. Διευρυντής (expander)

$$s_e[n] = \begin{cases} s_{\text{rd}}[n/M] + js_{\text{id}}[n/M], & n = 0, \pm M, \pm 2M, \dots, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

2. Φίλτρο

$$H_i(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & -\pi < \omega < \omega_c, \\ M, & \omega_c < \omega < \omega_c + \Delta\omega, \\ 0, & \omega_c + \Delta\omega < \omega < \pi. \end{cases}$$

$$s_r[n] = \text{Re}\{s_e[n] * h_i[n]\}$$