



Διαλέξεις 3 & 4

Συστήματα Εξισώσεων Διαφορών
Διακριτά Σήματα στο Χώρο της Συχνότητας

(Κεφ. 2.5-2.9)

- Γραμμικές Εξισώσεις Διαφορών με Σταθερούς Συντελεστές (Linear Constant-Coefficient Difference Equations)
 - Ένας 2^{ος} τρόπος αναπαράστασης ΓΧΑ συστημάτων (αντί της συνέλιξης με την κρουστική απόκριση)
 - Χρήσιμος στην υλοποίηση των συστημάτων
 - Πολύ πιο απλά τα κυκλώματα καθυστέρησης και προσθαφαίρεσης από τη συνέλιξη
 - Δεν χρειάζεται να περιμένουμε όλο το σήμα → Επεξεργασία σε πραγματικό χρόνο
 - Ανάλογος των διαφορικών εξισώσεων στα συστήματα συνεχούς χρόνου

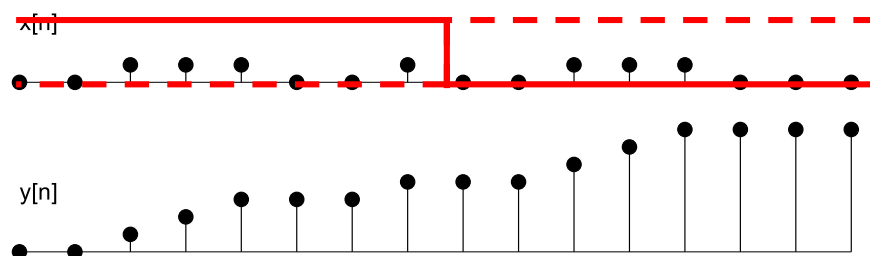
$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^M b_m x[n-m]$$

- Παράδειγμα

- Συσσωρευτής (Accumulator)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

Impulse Response Form



$$y[n] = x[n] * h[n] = x[n] * u[n]$$

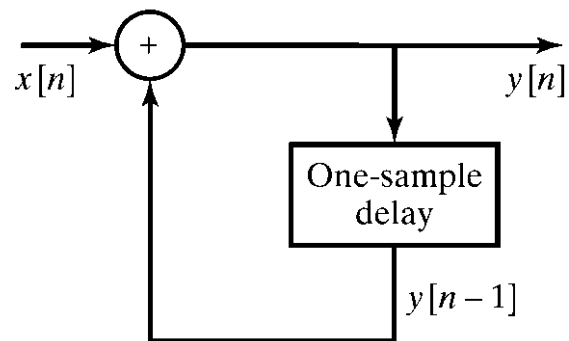
Difference Equation Form

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

$$y[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]$$

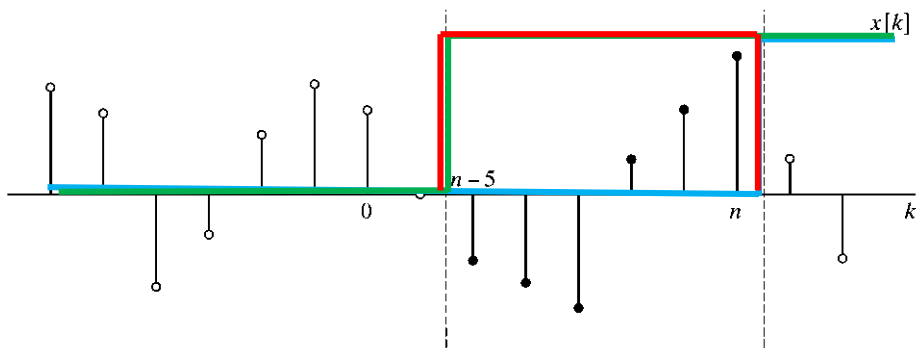
$$y[n] = x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] = x[n] + y[n-1]$$

$$y[n] - y[n-1] = x[n]$$



• Παράδειγμα

- Κινητός Μέσος Όρος: μέσος όρος με συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα
- $M_1=0 \rightarrow$ αιτιατό (causal)

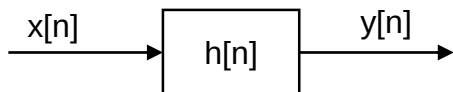


$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k]$$

$$= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \{x[n + M_1] + x[n + M_1 - 1] + \dots + x[n] + x[n-1] + \dots + x[n - M_2]\}.$$

$$y[n] = \frac{1}{(M_2 + 1)} \sum_{k=0}^{M_2} x[n-k]$$

Impulse Response Form



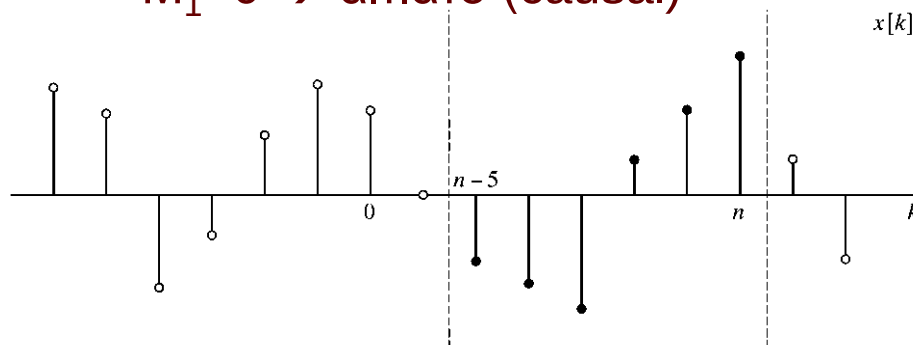
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k], \quad \text{for all } n$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$h[n] = \frac{1}{(M_2 + 1)} (u[n] - u[n - M_2 - 1])$$

• Παράδειγμα

- Κινητός Μέσος Όρος: μέσος όρος με συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα
- $M_1=0 \rightarrow$ αιτιατό (causal)



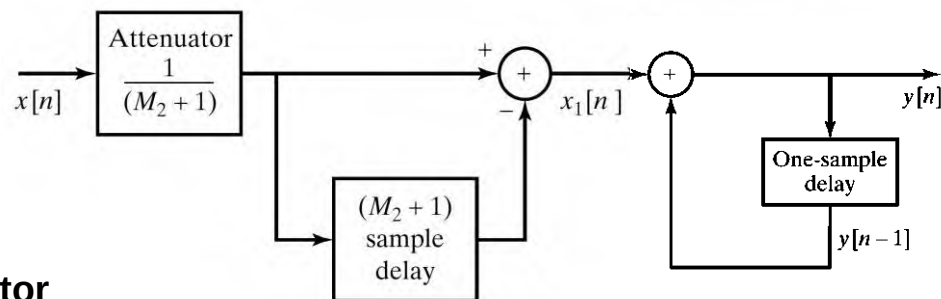
$$y[n] = \frac{1}{(M_2 + 1)} \sum_{k=0}^{M_2} x[n - k]$$

Difference Equation Form

$$h[n] = \frac{1}{(M_2 + 1)} (u[n] - u[n - M_2 - 1])$$

$$h[n] = \underbrace{\frac{1}{(M_2 + 1)}}_{\text{Attenuation}} \underbrace{(\delta[n] - \delta[n - M_2 - 1])}_{\text{x x delayed}} \underbrace{*}_{\text{Accumulator}} \underbrace{u[n]}_{\text{Accumulator}}$$

Attenuation x x delayed Accumulator



$$y[n] - y[n - 1] = x_1[n]$$

$$y[n] - y[n - 1] = \frac{1}{(M_2 + 1)} (x[n] - x[n - M_2 - 1])$$



- Η λύση δεν είναι μοναδική
 - Μοναδική μόνο με κάποιες βοηθητικές συνθήκες (auxiliary conditions)
 - Χρειάζονται N βοηθητικές συνθήκες
 - Αυτές οι συνθήκες καθορίζουν κατά πόσο ένα σύστημα είναι ΓΧΑ και αιτιατό
 - Αν το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ανάπαυσης αρχικά (initial rest) τότε θα είναι όλα τα πιο πάνω
 - Στο Διαλέξεις 7&8 (Κεφ. 3), θα μιλήσουμε για τη λύση εξισώσεων διαφορών με μετασχηματισμό z

- Σε ΓΧΑ συστήματα

- Μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις
→ ιδιοσυναρτήσεις (eigen functions)

- Είσοδος ημιτονοειδής → έξοδος ημιτονοειδής
 - Ίδια συχνότητα
 - Πλάτος και φάση καθορίζονται από το σύστημα

- Οι ιδιοτιμές $H(e^{j\omega})$ ονομάζονται απόκριση συχνότητας (frequency response)

- Είναι συνήθως μιγαδικές

$$x[n] = e^{j\omega n}, \quad -\infty < n < \infty$$

$$y[n] = T\{e^{j\omega n}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)}$$

$$= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}$$

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

Eigenvalue

Eigenfunction

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega})$$

$$= |H(e^{j\omega})| e^{j\angle H(e^{j\omega})}$$

- Παράδειγμα

- Απόκριση συχνότητας του ιδανικού συστήματος καθυστέρησης (ideal delay system)

$$y[n] = x[n - n_d] \rightarrow h[n] = \delta[n - n_d]$$

- Μέθοδος 1

$$x[n] = e^{j\omega n}$$

$$y[n] = T \{ e^{j\omega n} \} = e^{j\omega(n-n_d)} = e^{-j\omega n_d} e^{j\omega n}$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}$$

$$H_R(e^{j\omega}) = \cos(\omega n_d),$$

$$H_I(e^{j\omega}) = -\sin(\omega n_d).$$

$$|H(e^{j\omega})| = 1,$$

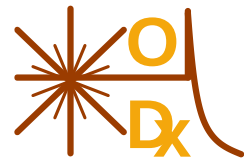
$$\angle H(e^{j\omega}) = -\omega n_d.$$

- Μέθοδος 2

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}$$

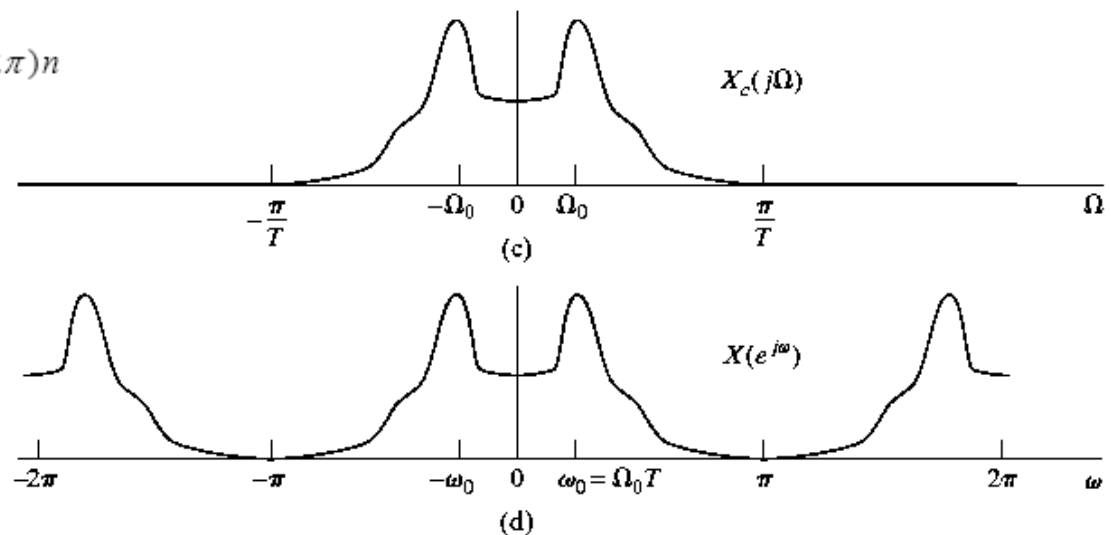
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k - n_d] e^{-j\omega k} = e^{-j\omega n_d}$$

Διακριτά Σήματα στο Χώρο της Συχνότητας



- Απόκριση συχνότητας ΓΧΑ συστημάτων διακριτού χρόνου
 - Ο “χρόνος” n είναι διακριτός $\rightarrow$ ακέραιος
 - Είναι πάντα περιοδική με συχνότητα ω και περίοδο 2π
 - Καθορίζεται μόνο μεταξύ
 - $-\pi < \omega \leq \pi$
 - Οι “ψηλές συχνότητες” βρίσκονται γύρω από το $\pm\pi$
 - Οι “χαμηλές συχνότητες” γύρω από το 0

$$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j(\omega+2\pi)n}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}e^{-j2\pi n} = H(e^{j\omega})$$



- Απόκριση συχνότητας ΓΧΑ συστημάτων διακριτού χρόνου
 - Ημιτονοειδής απόκριση
 - Έξοδος ημιτονοειδής με ίδια συχνότητα (πλάτος και φάση καθορίζονται από το σύστημα)

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi)$$

$$= \frac{A}{2} \underline{e^{j\phi} e^{j\omega_0 n}} + \frac{A}{2} \underline{e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}}$$

$$y[n] = \frac{A}{2} \underline{e^{j\phi} H(e^{j\omega_0}) e^{j\omega_0 n}} + \frac{A}{2} \underline{e^{-j\phi} H(e^{-j\omega_0}) e^{-j\omega_0 n}}$$


$$= A |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \phi + \theta)$$

if $x[n]$ is real

$$H(e^{-j\omega_0}) = H^*(e^{j\omega_0}) = |H(e^{j\omega_0})| e^{-\angle H(e^{j\omega_0})} = |H(e^{j\omega_0})| e^{-\theta}$$

- Ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων (ideal frequency selective filters)

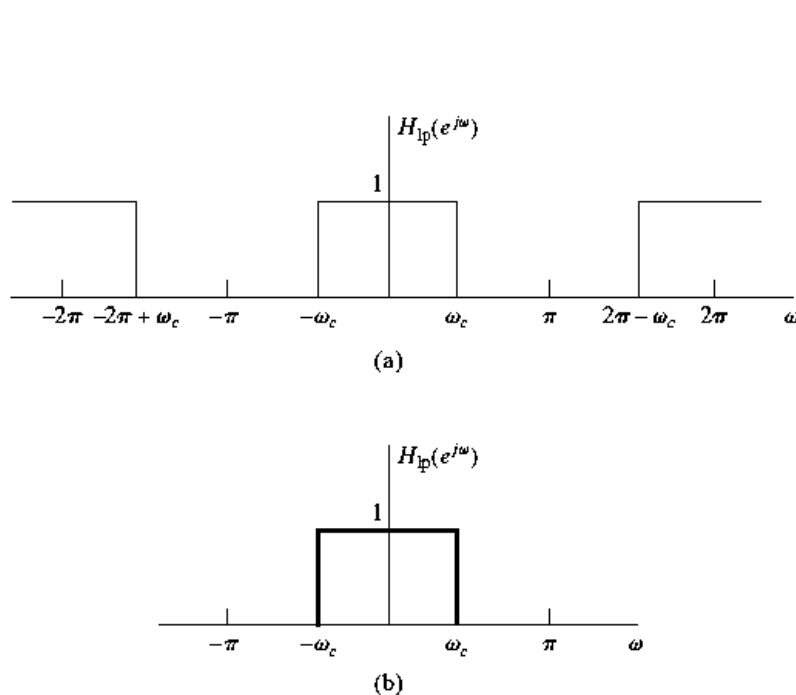


Figure 2.17 Ideal lowpass filter showing (a) periodicity of the frequency response and (b) one period of the periodic frequency response.

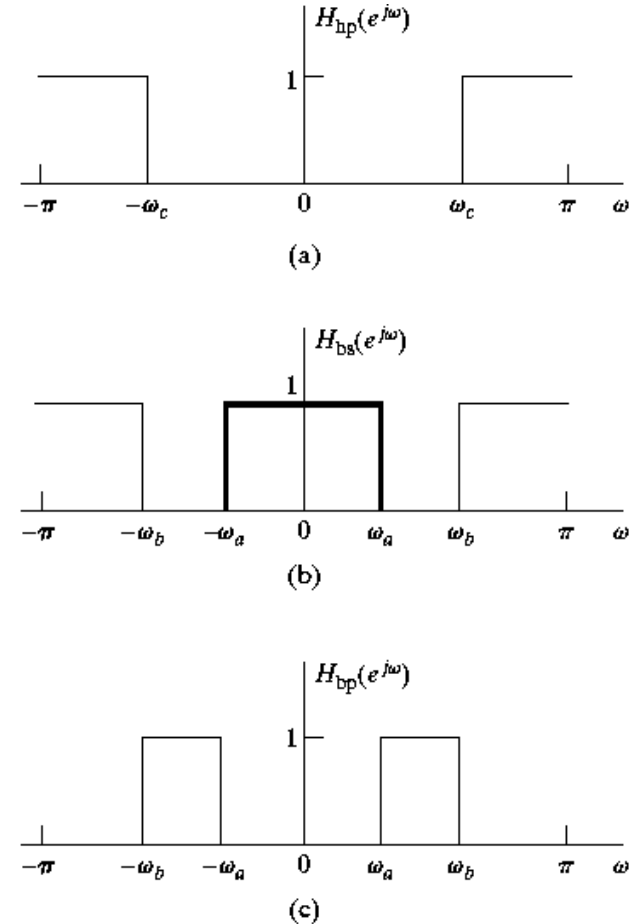
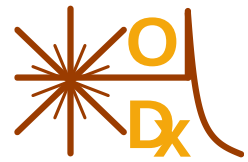


Figure 2.18 Ideal frequency-selective filters. (a) Highpass filter. (b) Bandstop filter. (c) Bandpass filter. In each case, the frequency response is periodic with period 2π . Only one period is shown.

Διακριτά Σήματα στο Χώρο της Συχνότητας



- **Απόκριση Συχνότητας (Frequency response)**

- Πολλά σήματα μπορούν να καθοριστούν ως ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών
- Αν αυτό ισχύει, το σήμα εξόδου $y[n]$ καθορίζεται από την απόκριση συχνότητας

$$x[n] = \sum_k \alpha_k e^{j\omega_k n}$$

$$y[n] = \sum_k \alpha_k H(e^{j\omega_k}) e^{j\omega_k n}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier**

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

←Ο μετασχηματισμός Fourier είναι συνήθως μιγαδικός (πλάτος & φάση)

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

$$= |X(e^{j\omega})| e^{j\angle X(e^{j\omega})}$$

- **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier**

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

←Το $x[n]$ αποτελείται από πολλά μικροσκοπικά μιγαδικά ημιτονοειδή

$$\frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

- $\omega \rightarrow$ συνεχής μεταβλητή
- $n \rightarrow$ διακριτή μεταβλητή



- Μετασχηματισμός Fourier

- Είναι περιοδικός με περίοδο 2π
- Αν το $x[n]$ αθροίζεται (absolutely summable) τότε ο μετασχηματισμός Fourier καθορίζεται και υπάρχει (exists)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$\begin{aligned} |X(e^{j\omega})| &= \left| \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \right| \\ &\leq \sum_{-\infty}^{\infty} |x[n]| |e^{-j\omega n}| \\ &\leq \sum_{-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \end{aligned}$$

Διακριτά Σήματα στο Χώρο της Συχνότητας



- Ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο (ideal low pass filter)

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$h_{lp}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$$

$$-\infty < n < \infty$$

$$H_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} e^{-j\omega n}$$

- Μη-αιτιατό
- Δεν αθροίζεται

- Το πεπερασμένο (finite) άθροισμα είναι σημαντικό στο σχεδιασμό φίλτρων διακριτού χρόνου

$$H_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} e^{-j\omega n}$$

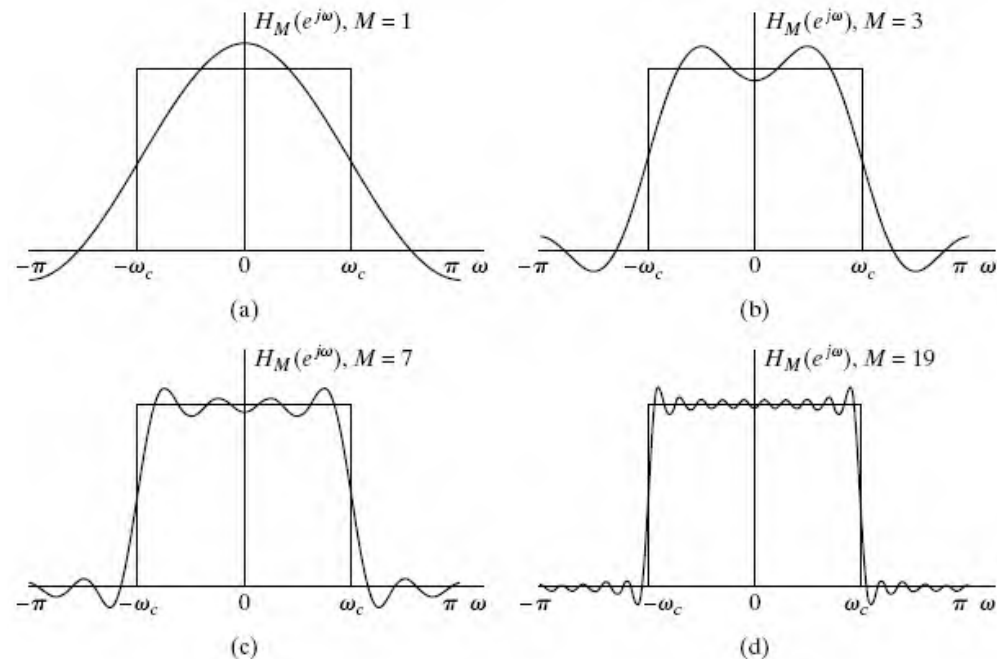


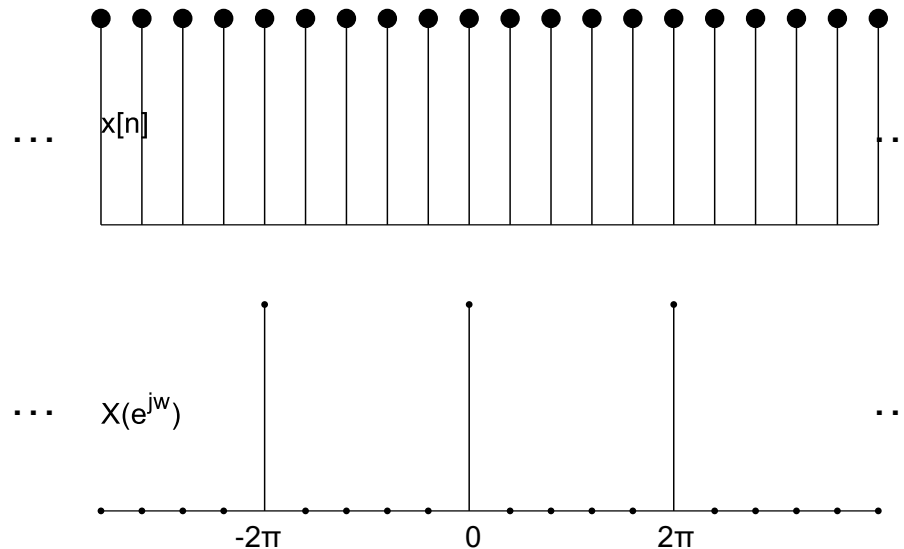
Figure 2.21 Convergence of the Fourier transform. The oscillatory behavior at $\omega = \omega_c$ is often called the Gibbs phenomenon.

- Μετασχηματισμός Fourier σταθεράς

- Μια περιοδική σειρά παλμών

$$x[n] = 1$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi r)$$





- Συμμετρικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier
 - Συζυγής Συμμετρική Σειρά (conjugate-symmetric sequence)

$$x_e[n] = x_e^*[-n]$$

- Συζυγής Αντι-συμμετρική Σειρά (conjugate-antisymmetric sequence)

$$x_o[n] = -x_o^*[-n]$$

TABLE 2.1 SYMMETRY PROPERTIES OF THE FOURIER TRANSFORM

Sequence $x[n]$	Fourier Transform $X(e^{j\omega})$
1. $x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
2. $x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
3. $\text{Re}\{x[n]\}$	$X_e(e^{j\omega})$ (conjugate-symmetric part of $X(e^{j\omega})$)
4. $j\text{Im}\{x[n]\}$	$X_o(e^{j\omega})$ (conjugate-antisymmetric part of $X(e^{j\omega})$)
5. $x_e[n]$ (conjugate-symmetric part of $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega}) = \text{Re}\{X(e^{j\omega})\}$
6. $x_o[n]$ (conjugate-antisymmetric part of $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega}) = j\text{Im}\{X(e^{j\omega})\}$

The following properties apply only when $x[n]$ is real:

7. Any real $x[n]$	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ (Fourier transform is conjugate symmetric)
8. Any real $x[n]$	$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ (real part is even)
9. Any real $x[n]$	$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ (imaginary part is odd)
10. Any real $x[n]$	$ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) $ (magnitude is even)
11. Any real $x[n]$	$\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$ (phase is odd)
12. $x_e[n]$ (even part of $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega})$
13. $x_o[n]$ (odd part of $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega})$

- Γραμμικότητα μετασχηματισμού Fourier

$$x_1[n] \xleftrightarrow{F} X_1(e^{j\omega})$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{F} X_2(e^{j\omega})$$

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{F} aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

- Μετατόπιση στο χρόνο και στη συχνότητα

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$x[n - n_d] \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$$

$$e^{-j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

- Αντιστροφή στο χρόνο

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$x[-n] \xleftrightarrow{F} X(e^{-j\omega})$$

$$x[-n] \xleftrightarrow{F} X^*(e^{j\omega})$$

- Παράγωγος Συχνότητας

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$nx[n] \xleftrightarrow{F} j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

- Θεώρημα του Parseval

- E=ενέργεια

$$x[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X(e^{j\omega})$$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

- Θεώρημα διαμόρφωσης (modulation) ή παράθυρου (windowing)

$$x[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X(e^{j\omega})$$

$$w[n] \overset{F}{\leftrightarrow} W(e^{j\omega})$$

$$y[n] = x[n]w[n]$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

- Θεώρημα Συνέλιξης

$$x[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X(e^{j\omega})$$

$$h[n] \overset{F}{\leftrightarrow} H(e^{j\omega})$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

• Θωρήματα

TABLE 2.2 FOURIER TRANSFORM THEOREMS

Sequence $x[n]$ $y[n]$	Fourier Transform $X(e^{j\omega})$ $Y(e^{j\omega})$
1. $ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
2. $x[n - n_d]$ (n_d an integer)	$e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$
3. $e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
4. $x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$ $X^*(e^{j\omega})$ if $x[n]$ real.
5. $nx[n]$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
6. $x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
7. $x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega - \theta)})d\theta$

Parseval's theorem:

$$8. \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

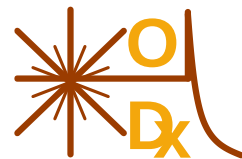
$$9. \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$$

• Μετασχηματισμοί κάποιων συναρτήσεων

TABLE 2.3 FOURIER TRANSFORM PAIRS

Sequence	Fourier Transform
1. $\delta[n]$	1
2. $\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
3. 1 $(-\infty < n < \infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega + 2\pi k)$
4. $a^n u[n]$ $(a < 1)$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
5. $u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega + 2\pi k)$
6. $(n+1)a^n u[n]$ $(a < 1)$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$
7. $\frac{r^n \sin \omega_p (n+1)}{\sin \omega_p} u[n]$ $(r < 1)$	$\frac{1}{1 - 2r \cos \omega_p e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
8. $\frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c \\ 0, & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$
9. $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
10. $e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
11. $\cos(\omega_0 n + \phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \pi e^{-j\phi} \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$

Διακριτά Σήματα στο Χώρο της Συχνότητας

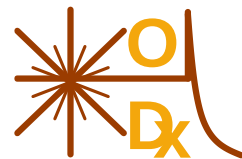


- Παράδειγμα $x[n] = a^n u[n - 5]$

TABLE 2.3 FOURIER TRANSFORM PAIRS

Sequence	Fourier Transform
1. $\delta[n]$	1
2. $\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
3. 1 $(-\infty < n < \infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega + 2\pi k)$
4. $a^n u[n] \quad (a < 1)$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
5. $u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega + 2\pi k)$
6. $(n+1)a^n u[n] \quad (a < 1)$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$
7. $\frac{r^n \sin \omega_p (n+1)}{\sin \omega_p} u[n] \quad (r < 1)$	$\frac{1}{1 - 2r \cos \omega_p e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
8. $\frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c \\ 0, & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$
9. $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
10. $e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
11. $\cos(\omega_0 n + \phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \pi e^{-j\phi} \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$

Διακριτά Σήματα στο Χώρο της Συχνότητας



- Παράδειγμα $x[n] = a^n u[n-5]$

TABLE 2.2 FOURIER TRANSFORM THEOREMS

Sequence $x[n]$ $y[n]$	Fourier Transform $X(e^{j\omega})$ $Y(e^{j\omega})$
1. $ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
2. $x[n - n_d]$ (n_d an integer)	$e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$
3. $e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
4. $x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$ $X^*(e^{j\omega})$ if $x[n]$ real.
5. $nx[n]$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
6. $x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
7. $x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega - \theta)})d\theta$

Parseval's theorem:

$$8. \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

$$9. \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$$

- Παράδειγμα $x[n] = a^n u[n-5]$

$$x_1[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{F} X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$x_2[n] = x_1[n-5] \quad (\text{i.e.} = a^{n-5} u[n-5])$$

$$X_2(e^{j\omega}) = e^{-j5\omega} X_1(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j5\omega}}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$x[n] = a^5 x_2[n] \quad (\text{i.e.} = a^n u[n-5])$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{a^5 e^{-j5\omega}}{1 - ae^{-j\omega}}$$

• Matlab και συμβολικοί μετασχηματισμοί

```
syms t w
```

```
f = t*exp(-t^2);
```

```
F=fourier(f, t, w);
```

```
F = -(w*pi^(1/2)*exp(-w^2/4)*1i)/2
```

```
fplot(abs(F), [-3*pi 3*pi])
```

```
fplot(angle(F), [-3*pi 3*pi])
```

