



Διάλεξεις 9 & 10

Ανάλυση ΓΧΑ Συστημάτων

Κεφ. 5

(εκτός 5.7.4 και 5.3 μόνο από διάλεξη)



- Ένα ΓΧΑ σύστημα καθορίζεται πλήρως από

- Κρουστική απόκριση (impulse response)

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

- Απόκριση Συχνότητας (frequency response)

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

- Απόκριση Συστήματος (system response)

$$Y(z) = H(z)X(z).$$

- **Απόκριση Συχνότητας (frequency response)**

- Σχέση μεταξύ μετασχηματισμών Fourier

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}), \quad |Y(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})| \cdot |X(e^{j\omega})| \quad \angle Y(e^{j\omega}) = \angle H(e^{j\omega}) + \angle X(e^{j\omega})$$

- Το αποτέλεσμα της αλλαγής του πλάτους και της φάσης μπορεί να είναι θετικό (π.χ. ενίσχυση) ή αρνητικό (π.χ. παραμόρφωση (distortion))

- Παράδειγμα

- Ιδανικό Χαμηλοπερατό (low pass) Φίλτρο

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$h_{lp}[n] = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty$$

- Ιδανικό Υψιπερατό (high pass) Φίλτρο

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & |\omega| < \omega_c, \\ 1, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = 1 - H_{lp}(e^{j\omega})$$

$$h_{bp}[n] = \delta[n] - h_{lp}[n] = \delta[n] - \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$$

- Ιδανικά φίλτρα έχουν φάση 0

- Άπειρη κρουστική απόκριση

- $h[n] \neq 0$ για $-\infty < n < +\infty$

- Μη-αιτιατό

- Δεν μπορεί να εφαρμοστεί

- Αιτιατές προσεγγίσεις μπορεί να έχουν παραμορφώσεις φάσης

- **Αποτελέσματα της παραμόρφωσης φάσης (phase distortion)**

- Ιδανικό σύστημα καθυστέρησης (ideal delay system)

$$h_{id}[n] = \delta[n - n_d]$$

$$H_{id}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} \quad |H_{id}(e^{j\omega})| = 1 \quad \angle H_{id}(e^{j\omega}) = -\omega n_d, \quad |\omega| < \pi$$

- Γραμμική φάση
- Η παραμόρφωση δεν είναι και τόσο σημαντική
- Μπορεί να αντισταθμιστεί στο σύστημα
- Φίλτρο με καθυστέρηση

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega n_d}, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

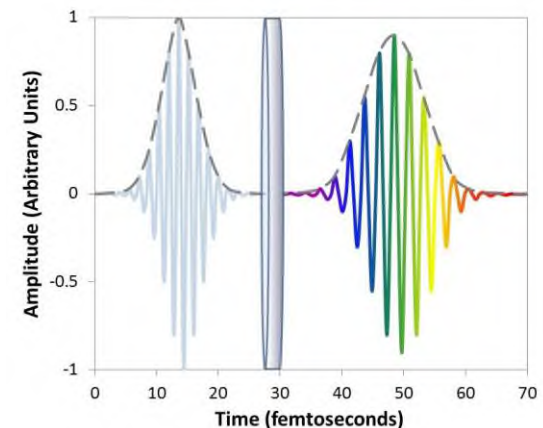
$$h_{lp}[n] = \frac{\sin \omega_c (n - n_d)}{\pi (n - n_d)}, \quad -\infty < n < \infty$$

- Και πάλι δεν είναι αιτιατό!
- Ομαδική Καθυστέρηση (group delay)
 - Μέτρο της γραμμικότητας της φάσης

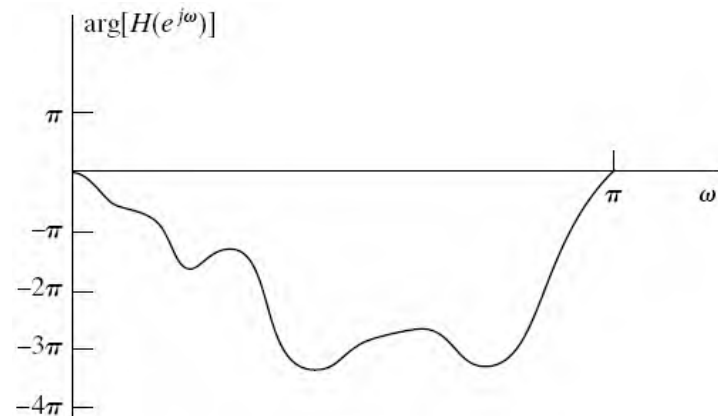
$$\tau(\omega) = \text{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega} \{\arg[H(e^{j\omega})]\}$$

- Ο όρος $\arg[H(e^{j\omega})]$ είναι η συνεχής φάσης του $H(e^{j\omega})$

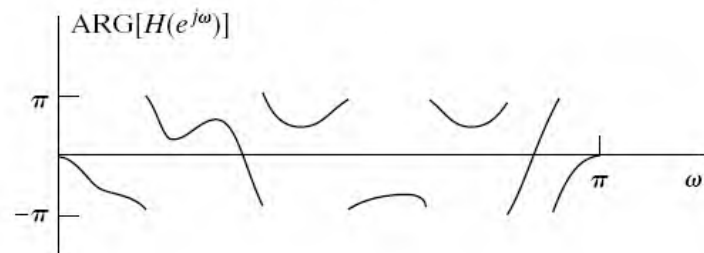
- Αν η καθυστέρηση είναι διαφορετική για διαφορετικές ω → διασπορά (dispersion)



- Συνεχής φάση (continuous phase)
 - Κύρια τιμή (principal value) της φάσης
 - $\text{ARG}[H(e^{j\omega})]$
$$-\pi < \text{ARG}[H(e^{j\omega})] \leq \pi$$
$$\angle H(e^{j\omega}) = \text{ARG}[H(e^{j\omega})] + 2\pi r(\omega)$$
- Συνεχής φάση
 - $\arg[H(e^{j\omega})]$
 - Όπως και η $\text{ARG}[H(e^{j\omega})]$ αλλά χωρίς ασυνέχειες $\pm\pi$

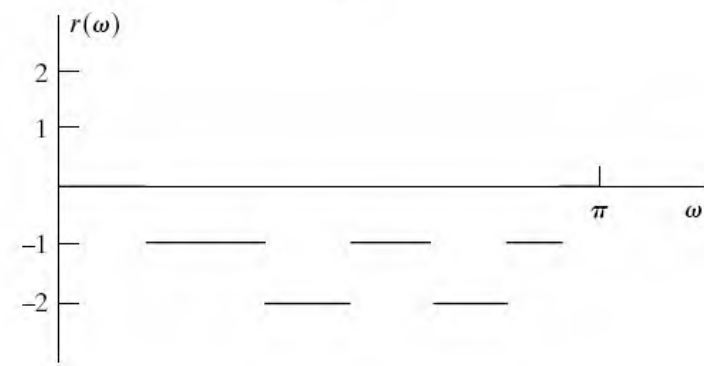


(a)



(b)

Figure 5.7 (a) Continuous-phase curve for a system function evaluated on the unit circle. (b) Principal value of the phase curve in part (a). (c) Integer multiples of 2π to be added to $\text{ARG}[H(e^{j\omega})]$ to obtain $\arg[H(e^{j\omega})]$.



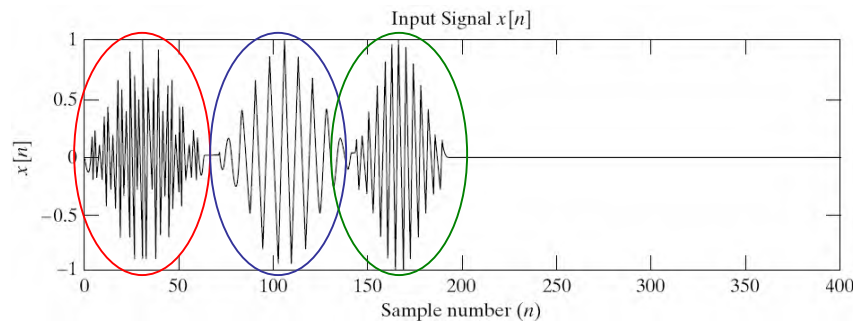
• Παράδειγμα Εξασθένησης και Ομαδικής Καθυστέρησης

$$x[n] = s[n] \cos(\omega_0 n)$$

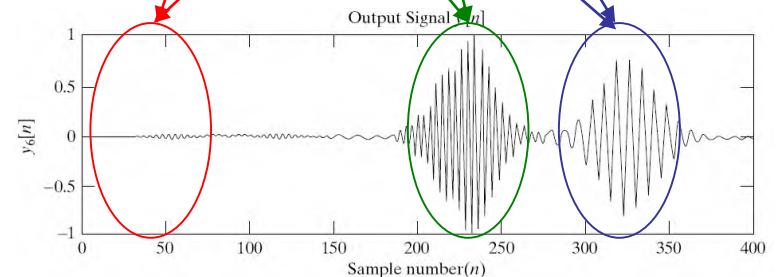
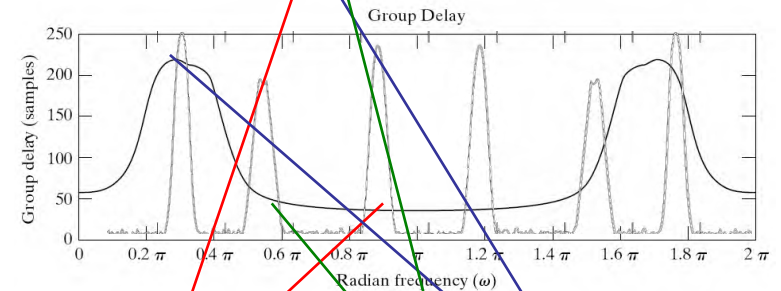
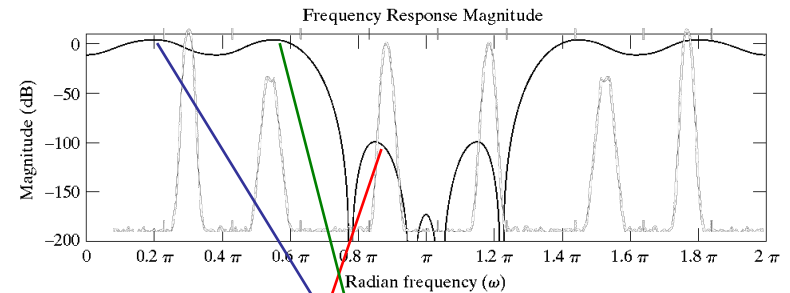
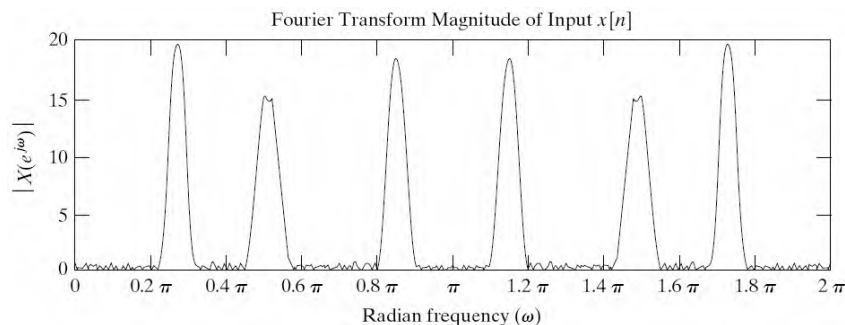
- Για τιμές γύρω από το ω_0

$$\angle H(e^{j\omega}) \simeq -\phi_0 - \omega n_d$$

$$y[n] = |H(e^{j\omega_0})| s[n - n_d] \cos(\omega_0 n - \phi_0 - \omega_0 n_d)$$



$\omega = 0.85\pi, 0.25\pi, 0.50\pi$



- **Απόκριση Συστήματος (System Response)**

- Γραμμικές Εξισώσεις Διαφορών με Σταθερούς Συντελεστές (Linear Constant-Coefficient Difference Equations ή LCCDE)

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z)$$

$$\left(\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \right) Y(z) = \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right) X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

$$H(z) = \left(\frac{b_0}{a_0} \right) \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

- **Απόκριση Συστήματος (System Response)**

- Γραμμικές Εξισώσεις Διαφορών με Σταθερούς Συντελεστές (Linear Constant-Coefficient Difference Equations ή LCCDE)

Example 5.2 Second-Order System

Suppose that the system function of a linear time-invariant system is

$$H(z) = \frac{(1 + z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{3}{4}z^{-1})}. \quad (5.20)$$

To find the difference equation that is satisfied by the input and output of this system, we express $H(z)$ in the form of Eq. (5.18) by multiplying the numerator and denominator factors to obtain the ratio of polynomials

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}. \quad (5.21)$$

Thus,

$$(1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}) Y(z) = (1 + 2z^{-1} + z^{-2}) X(z),$$

and the difference equation is

$$y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{3}{8}y[n-2] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]. \quad (5.22)$$

Note that once the correspondence is well understood, it is possible to proceed directly from Eq. (5.21) to Eq. (5.22) without the intervening algebra (and vice versa).

- Σταθερότητα (stability) και Αιτιατότητα (causality)

- Σταθερότητα

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]z^{-n}| < \infty$$

- Περιοχή σύγκλισης (ROC) περιλαμβάνει το $|z|=1$

- Αιτιατότητα

- $h[n] \rightarrow$ “δεξιά” συνάρτηση
 - Περιοχή σύγκλισης (ROC) έξω από τον πιο εξωτερικό πόλο

- Σταθερότητα (stability) και Αιτιατότητα (causality)

Example 5.3 Determining the ROC

Consider the LTI system with input and output related through the difference equation

$$y[n] - \frac{5}{2}y[n-1] + y[n-2] = x[n]. \quad (5.25)$$

From the previous discussions, $H(z)$ is given by

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}. \quad (5.26)$$

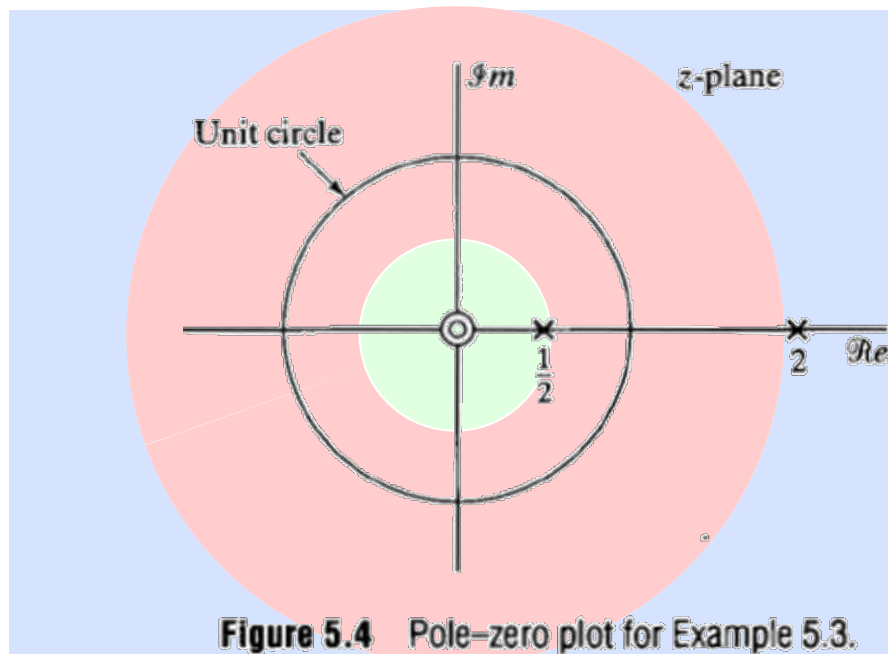


Figure 5.4 Pole-zero plot for Example 5.3.

- $|z| > 2$
 - Αιτιατό, όχι σταθερό
- $\frac{1}{2} < |z| < 2$
 - Σταθερό, όχι αιτιατό
- $|z| < \frac{1}{2}$
 - Ούτε σταθερό, ούτε αιτιατό

- Αντίστροφα Συστήματα (Inverse Systems)

$$G(z) = H(z)H_i(z) = 1$$

$$g[n] = h[n] * h_i[n] = \delta[n]$$

$$H_i(z) = \frac{1}{H(z)}$$

$$H(z) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right) \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

$$H_i(z) = \left(\frac{a_0}{b_0}\right) \frac{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}$$

- Οι πόλοι του H είναι μηδενικά του H_i και αντίστροφα
- Οι περιοχές σύγκλησης πρέπει να επικαλύπτονται (για να υπάρχει η συνέλιξη G)
- Για να είναι αιτιατό το αντίστροφο σύστημα

$$|z| > \max_k |c_k|$$

- Για να είναι και σταθερό το αντίστροφο σύστημα

$$\max_k |c_k| < 1$$

• Αντίστροφα Συστήματα (Inverse Systems)

Example 5.5 Inverse for System with a Zero in the ROC

Suppose that $H(z)$ is

$$H(z) = \frac{z^{-1} - 0.5}{1 - 0.9z^{-1}}, \quad |z| > 0.9.$$

The inverse system function is

$$H_i(z) = \frac{1 - 0.9z^{-1}}{z^{-1} - 0.5} = \frac{-2 + 1.8z^{-1}}{1 - 2z^{-1}}.$$

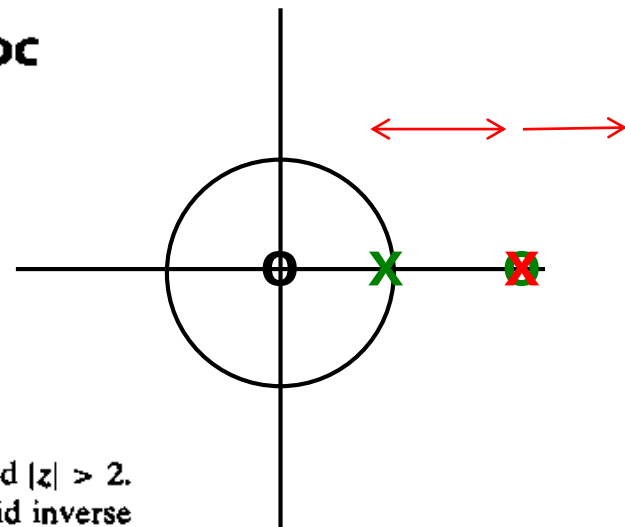
As before, there are two possible regions of convergence: $|z| < 2$ and $|z| > 2$. In this case, however, *both* regions overlap with $|z| > 0.9$, so both are valid inverse systems. The corresponding impulse response for an ROC $|z| < 2$ is

$$h_{i1}[n] = 2(2)^n u[-n - 1] - 1.8(2)^{n-1} u[-n]$$

and, for an ROC $|z| > 2$, is

$$h_{i2}[n] = -2(2)^n u[n] + 1.8(2)^{n-1} u[n - 1].$$

We see that $h_{i1}[n]$ is stable and noncausal, while $h_{i2}[n]$ is unstable and causal.



- Συστήματα με άπειρη κρουστική απόκριση (infinite impulse response)

$$H(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}$$

$$h[n] = \sum_{r=0}^{M-N} B_r \delta[n - r] + \sum_{k=1}^N A_k d_k^n u[n]$$

- IIR $\rightarrow$ Έχουν τουλάχιστον ένα πόλο εκτός από το μηδέν
 - Μη-αιτιατό
 - Δεν μπορεί να εφαρμοστεί
 - Αιτιατές προσεγγίσεις

- Συστήματα με άπειρη κρουστική απόκριση (infinite impulse response)

Example 5.6 A First-Order IIR System

Consider a causal system whose input and output satisfy the difference equation

$$y[n] - ay[n-1] = x[n]. \quad (5.36)$$

The system function is (by inspection)

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}. \quad (5.37)$$

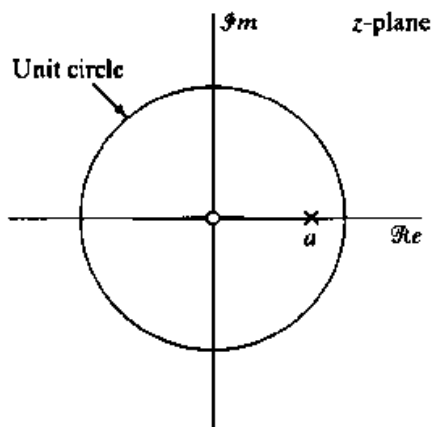


Figure 5.5 Pole-zero plot for Example 5.6.

Figure 5.5 shows the pole-zero plot of $H(z)$. The region of convergence is $|z| > |a|$, and the condition for stability is $|a| < 1$. The inverse z -transform of $H(z)$ is

$$h[n] = a^n u[n]. \quad (5.38)$$

- Συστήματα με πεπερασμένη κρουστική απόκριση (finite impulse response)

$$H(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} \quad h[n] = \sum_{r=0}^{M-N} B_r \delta[n-r] + \sum_{k=1}^N A_k d_k^n u[n]$$

- FIR → Έχουν πόλους μόνο στο μηδέν

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$$

$$h[n] = \sum_{k=0}^M b_k \delta[n-k] = \begin{cases} b_n, & 0 \leq n \leq M. \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

- Συστήματα με πεπερασμένη κρουστική απόκριση (finite impulse response)

Example 5.7 A Simple FIR System

Consider an impulse response that is a truncation of the impulse response of Example 5.6:

$$h[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq M, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then the system function is

$$H(z) = \sum_{n=0}^M a^n z^{-n} = \frac{1 - a^{M+1} z^{-M-1}}{1 - a z^{-1}}. \quad (5.42)$$

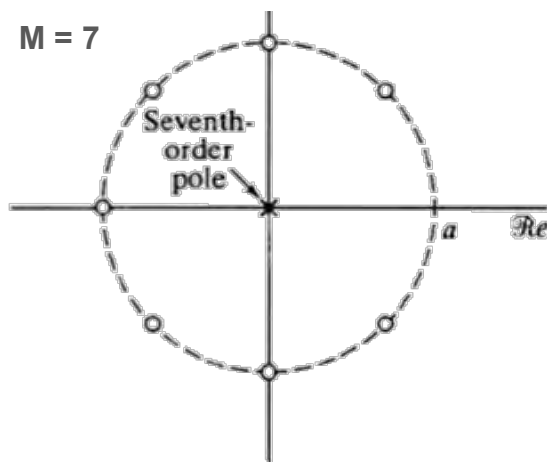


Figure 5.6 Pole-zero plot for Example 5.7.

- Απόκριση Συχνότητας από Απόκριση Συστήματος

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k}} \quad H(e^{j\omega}) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right) \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k e^{-j\omega})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k e^{-j\omega})}$$

- Πλάτος

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{b_0}{a_0} \right| \frac{\prod_{k=1}^M |1 - c_k e^{-j\omega}|}{\prod_{k=1}^N |1 - d_k e^{-j\omega}|}$$

- Φάση

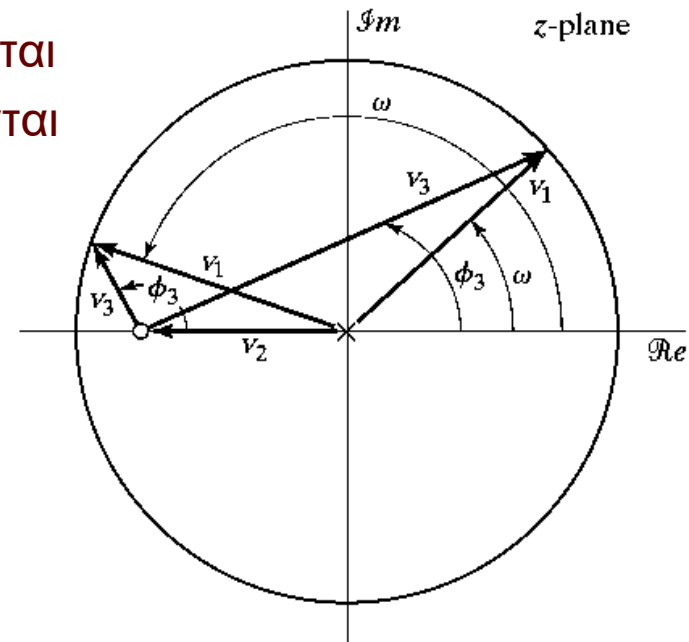
$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle \left[\frac{b_0}{a_0} \right] + \sum_{k=1}^M \angle [1 - c_k e^{-j\omega}] - \sum_{k=1}^N \angle [1 - d_k e^{-j\omega}]$$

- Ομαδική Καθυστέρηση

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \sum_{k=1}^N \frac{d}{d\omega} (\arg[1 - d_k e^{-j\omega}]) - \sum_{k=1}^M \frac{d}{d\omega} (\arg[1 - c_k e^{-j\omega}])$$

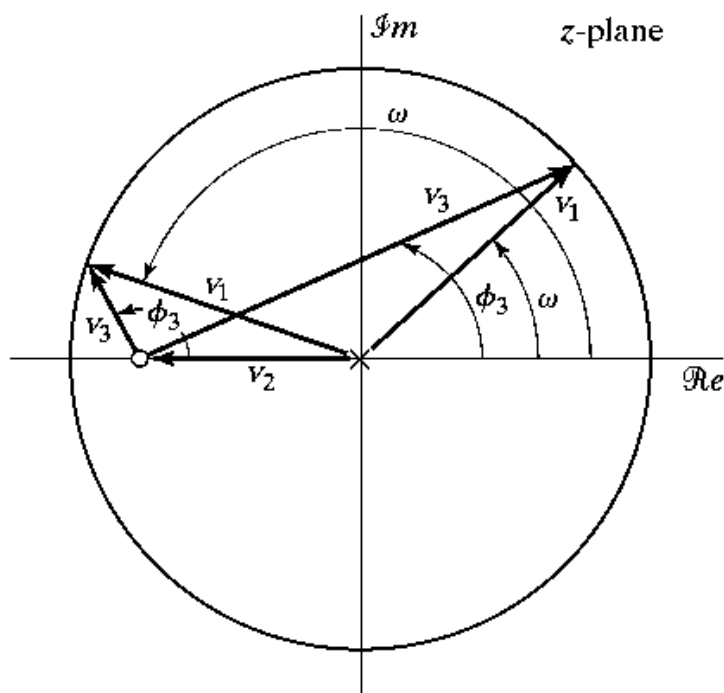
• Απόκριση Συχνότητας από Απόκριση Συστήματος

- Πλάτος
 - Τα μηδενικά “τραβούν” στο μηδέν
 - Οι πόλοι “τραβούν” στο άπειρο
 - Όσο πιο κοντά στο $|z|=1$ τόσο πιο πολύ “τραβούν”
- Φάση
 - Οι γωνίες από τα μηδενικά προστίθενται
 - Οι γωνίες από τους πόλους αφαιρούνται
- Ομαδική Καθυστέρηση
 - Παράγωγος της φάσης

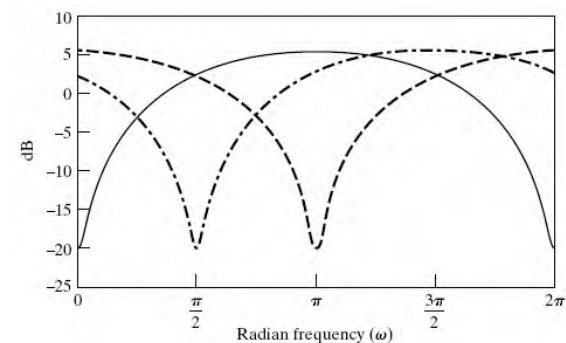


Matlab GUI

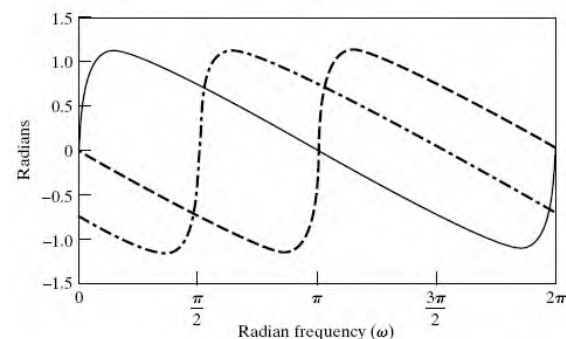
• Απόκριση Συχνότητας από Απόκριση Συστήματος



— $\theta = 0$
 - - - $\theta = \frac{\pi}{2}$
 - - - $\theta = \pi$



(a)



(b)

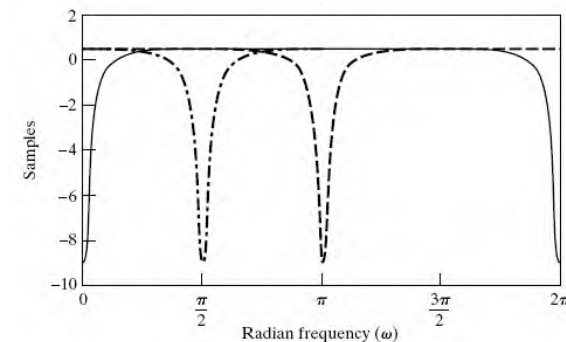


Figure 5.8 Frequency response for a single zero, with $r = 0.9$ and the three values of θ shown. (a) Log magnitude. (b) Phase. (c) Group delay.

• Απόκριση Συχνότητας από Απόκριση Συστήματος

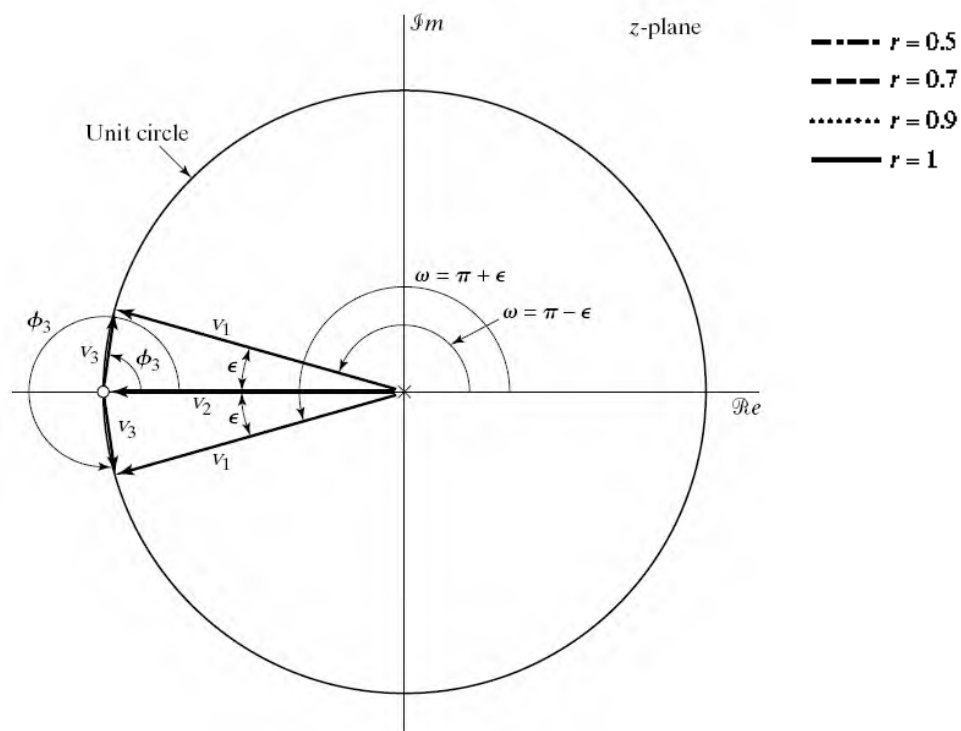
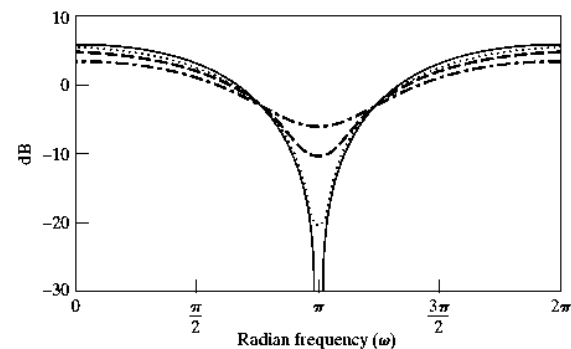
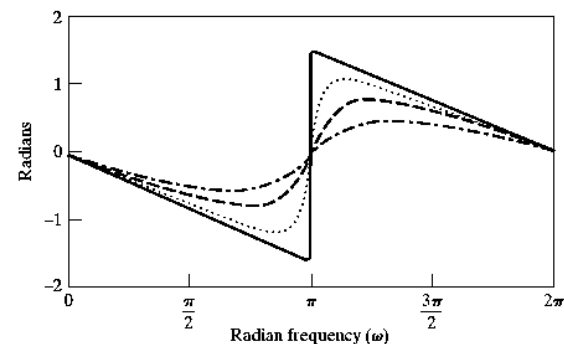


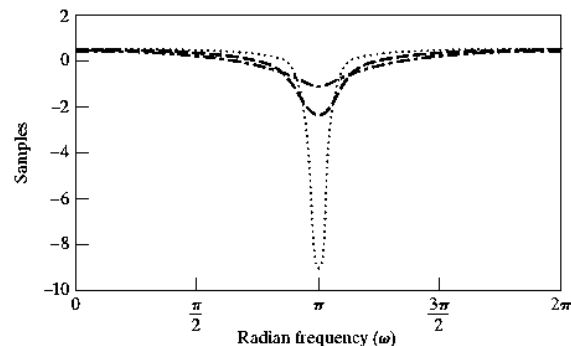
Figure 5.11 Frequency response for a single zero, with $\theta = \pi$, $r = 1, 0.9, 0.7$, and 0.5 . (a) Log magnitude. (b) Phase. (c) Group delay for $r = 0.9, 0.7$, and 0.5 .



(a)



(b)



• Απόκριση Συχνότητας από Απόκριση Συστήματος

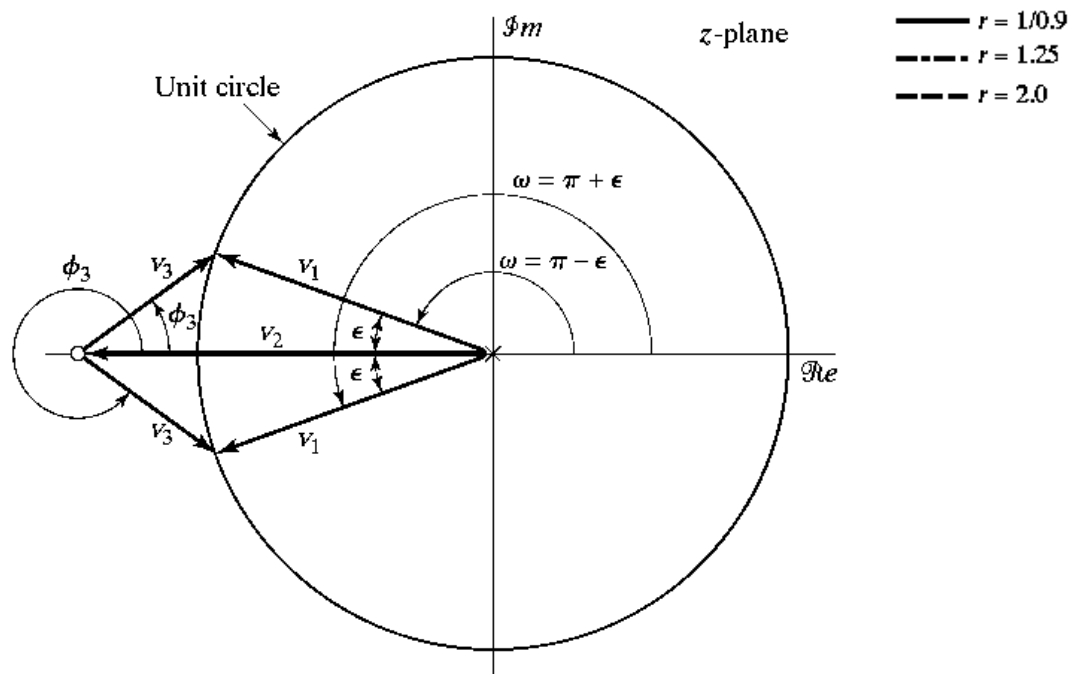
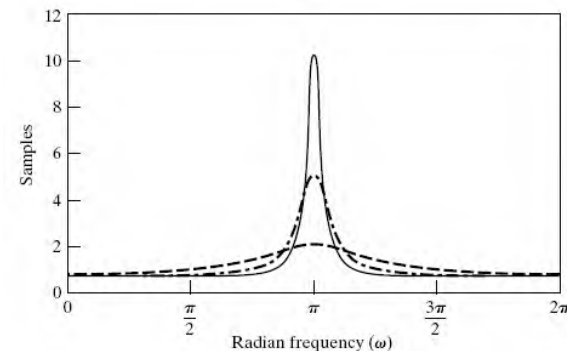
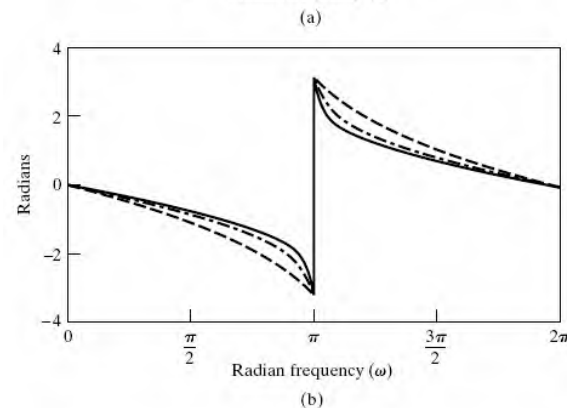
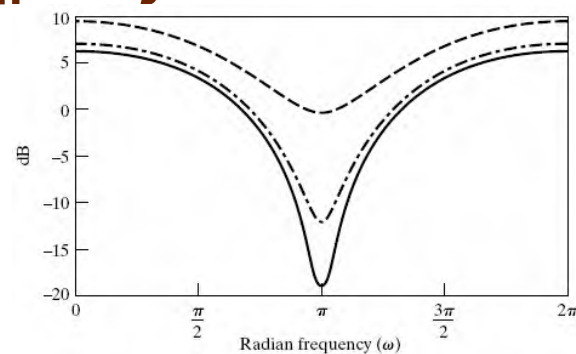


Figure 5.13 Frequency response for a single real zero outside the unit circle, with $\theta = \pi$, $r = 1/0.9, 1.25, 2$. (a) Log magnitude. (b) Phase (principal value). (c) Group delay.



• Απόκριση Συχνότητας από Απόκριση Συστήματος

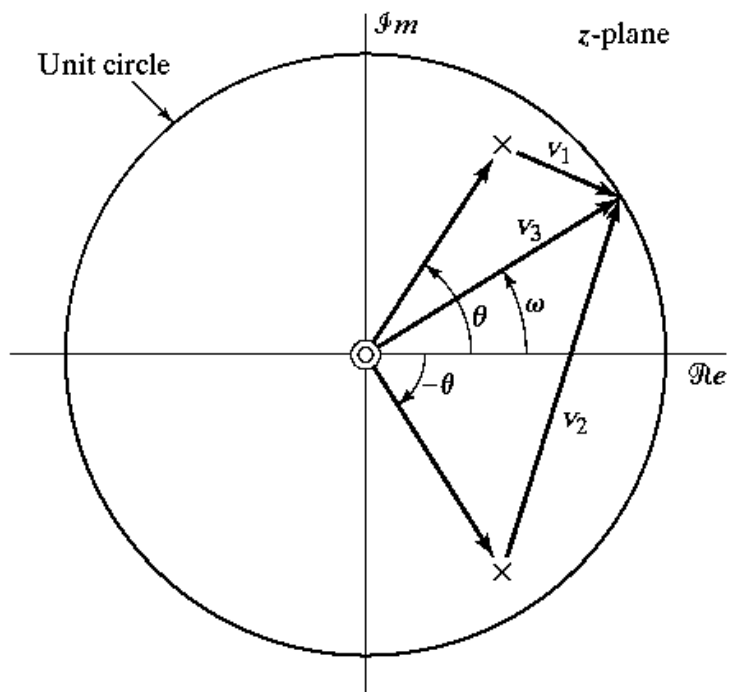
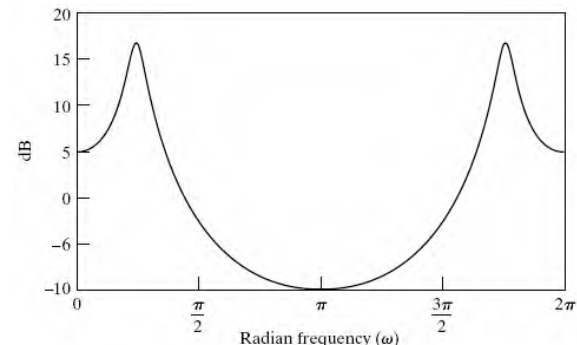
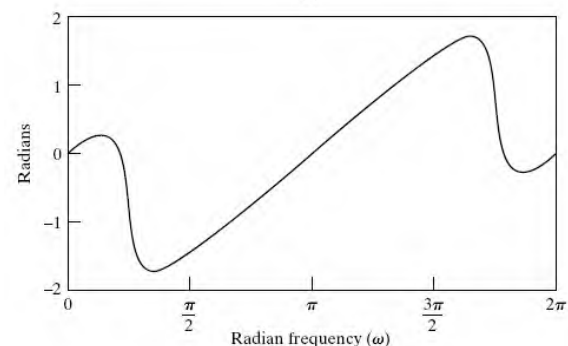


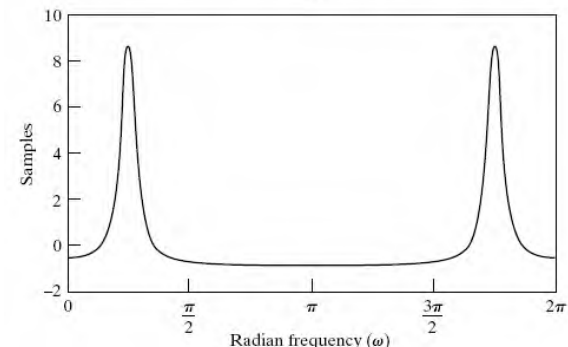
Figure 5.16 Frequency response for a complex-conjugate pair of poles as in Example 5.8, with $r = 0.9$, $\pi/4$. (a) Log magnitude. (b) Phase. (c) Group delay.



(a)



(b)



- Σχέση Πλάτους Φάσης για Συστήματα LCCDE

$$\begin{aligned}|H(e^{j\omega})|^2 &= H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) \\ &= H(z)H^*(1/z^*)|_{z=e^{j\omega}}\end{aligned}$$

$$H(z) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right) \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

$$H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right) \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k^* z)}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k^* z)}$$

- Αν μπορούμε από το πλάτος να βρούμε την απόκριση συστήματος τότε μπορούμε να βρούμε και τη φάση

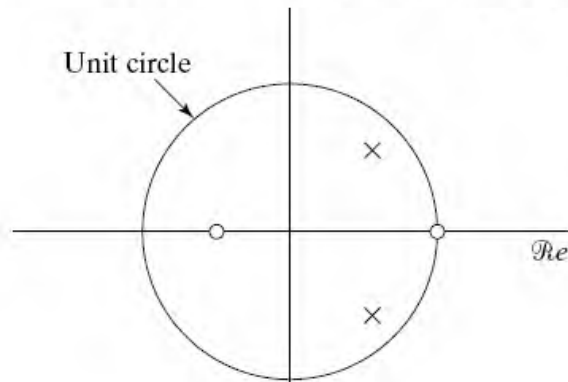
$$C(z) = H(z)H^*(1/z^*)$$

$$= \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z)}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z)}$$

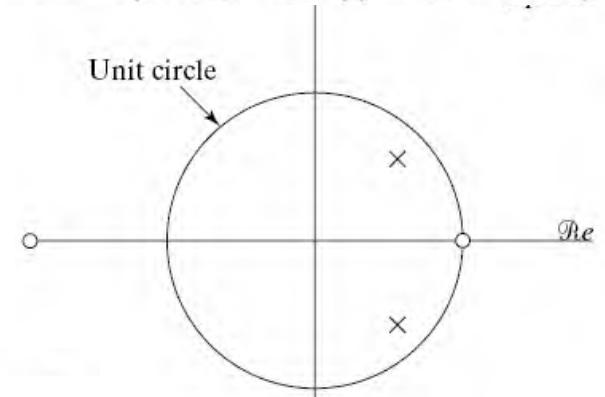
- Πόλοι: d_k and $(d_k^*)^{-1}$
- Μηδενικά: c_k and $(c_k^*)^{-1}$
- Αν το σύστημα είναι αιτιατό και σταθερό
 - Πόλοι μέσα από το μοναδιαίο κύκλο
 - Μηδενικά;

- Σχέση Πλάτους Φάσης για Συστήματα LCCDE

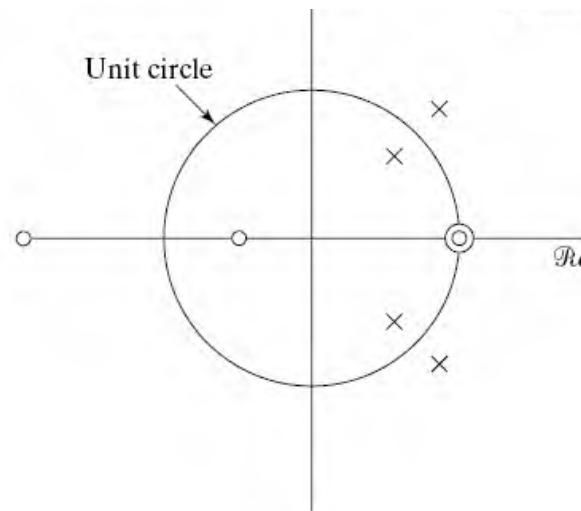
$$H_1(z) = \frac{2(1 - z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})}{(1 - 0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})}$$



$$H_2(z) = \frac{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})}{(1 - 0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})}$$



$$C(z) = H(z)H^*(1/z^*)$$



- Συστήματα Διέλευσης (All-pass Systems)

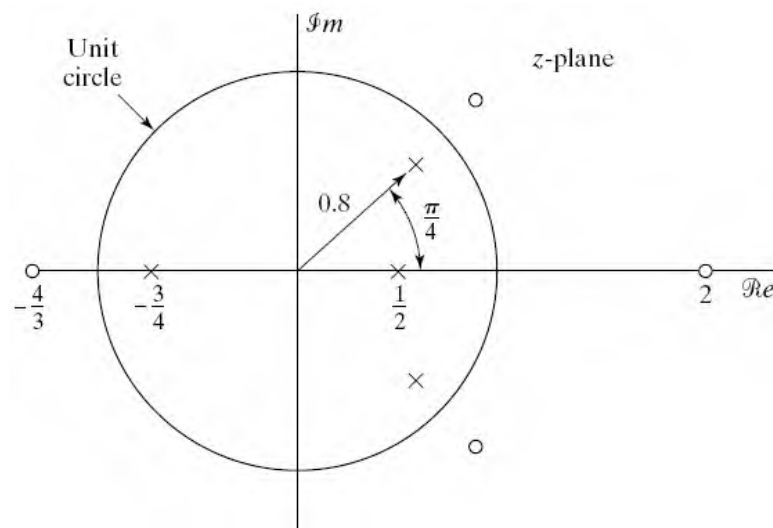
$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}$$

$$H_{ap}(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - ae^{-j\omega}} = e^{-j\omega} \frac{1 - a^*e^{j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$|H_{ap}(e^{j\omega})| = 1$$

- Ζεύγη πόλων και μηδενικών
- Γενική Μορφή

$$H_{ap}(z) = A \prod_{k=1}^{M_r} \frac{z^{-1} - d_k}{1 - d_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{M_c} \frac{(z^{-1} - e_k^*)(z^{-1} - e_k)}{(1 - e_k z^{-1})(1 - e_k^* z^{-1})}$$



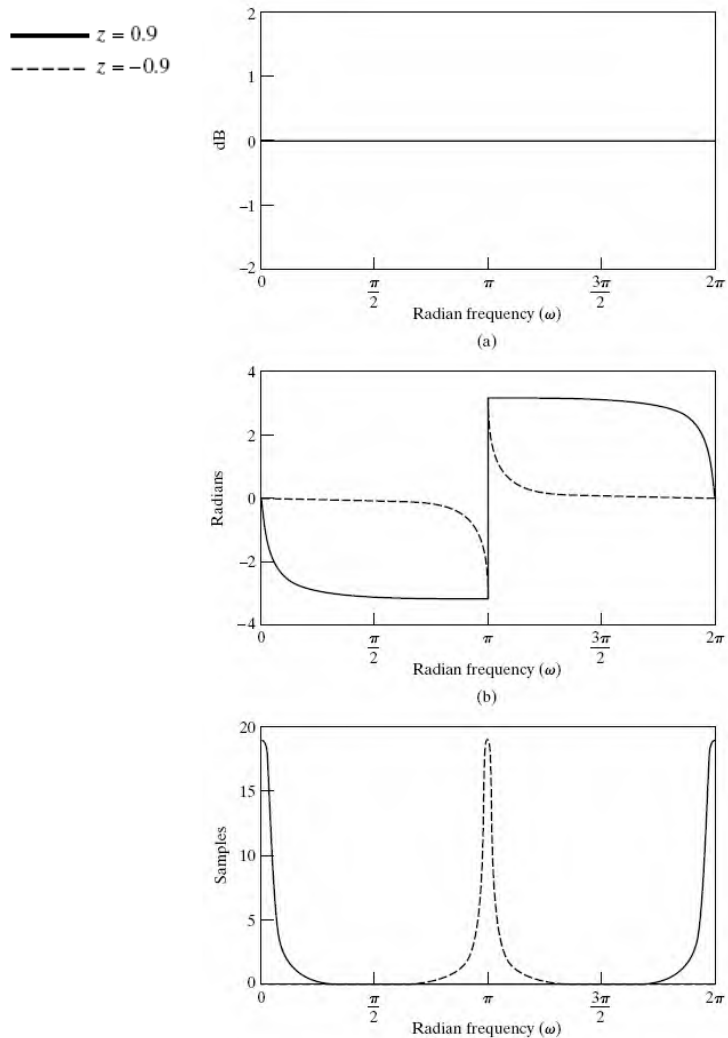


Figure 5.22 Frequency response for all-pass filters with real poles at $z = 0.9$ (solid line) and $z = -0.9$ (dashed line). (a) Log magnitude. (b) Phase (principal value). (c) Group delay.

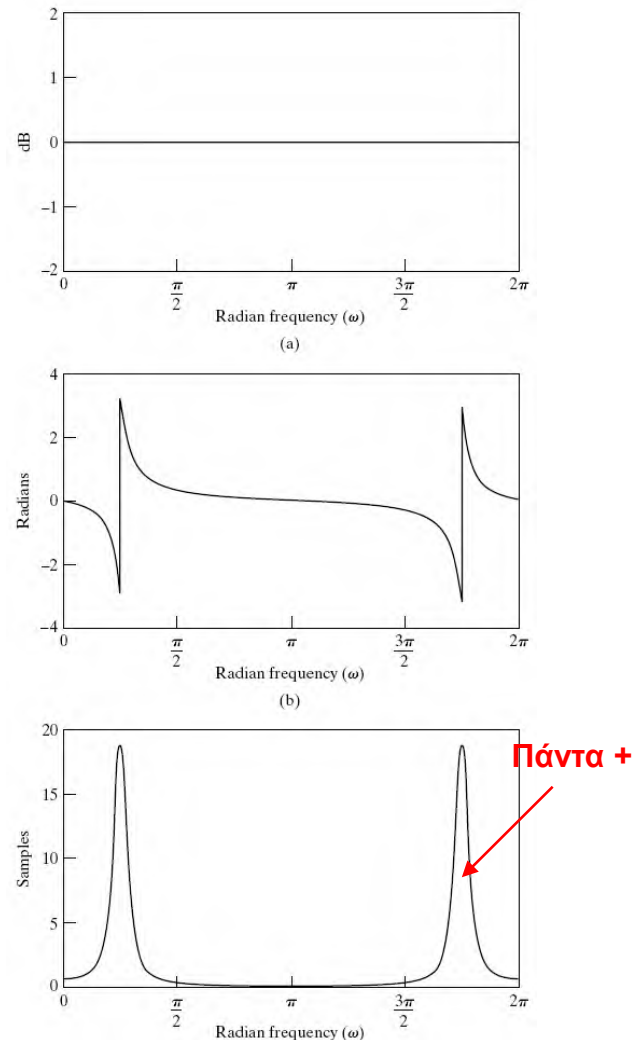


Figure 5.23 Frequency response of second-order all-pass system with poles at $z = 0.9e^{\pm j\pi/4}$. (a) Log magnitude. (b) Phase (principal value). (c) Group delay.

- **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης (Minimum Phase System)**

- Ένα ΓΧΑ δεν μπορεί να καθοριστεί μόνο από το πλάτος
- Αν είναι σταθερό και αιτιατό τότε οι πόλοι είναι μέσα στο μοναδιαίο κύκλο αλλά τα μηδενικά;
- Αν είναι και τα μηδενικά στο μοναδιαίο κύκλο τότε έχουμε ένα σύστημα του οποίου το αντίστροφο είναι επίσης σταθερό και αιτιατό → Πολύ χρήσιμο!!!
 - Ονομάζεται Σύστημα Ελάχιστης Φάσης
- Κάθε σήμα μπορεί να αναλυθεί ως

$$H(z) = H_{\min}(z)H_{\text{ap}}(z)$$

- Π.χ. αν το $H(z)$ έχει ένα πόλο εκτός του μοναδιαίου κύκλου στο

$$z = 1/c^*, \quad |c| < 1$$

$$H(z) = H_1(z)(z^{-1} - c^*)$$

$$H(z) = \underbrace{H_1(z)(1 - cz^{-1})}_{\text{Minimum Phase}} \underbrace{\frac{z^{-1} - c^*}{1 - cz^{-1}}}_{\text{All-Pass}}$$

Example 5.14 Minimum-Phase/All-Pass Decomposition

To illustrate the decomposition of a stable, causal system into the cascade of a minimum-phase and an all-pass system, consider the two stable, causal systems specified by the system functions

$$H_1(z) = \frac{(1 + 3z^{-1})}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

The first system function, $H_1(z)$, has a pole inside the unit circle at $z = -\frac{1}{2}$, but a zero outside at $z = -3$. We will need to choose the appropriate all-pass system to reflect this zero inside the unit circle. From Eq. (5.101), we have $c = -\frac{1}{3}$. Therefore, from Eqs. (5.102) and (5.103), the all-pass component will be

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}},$$

and the minimum-phase component will be

$$H_{min}(z) = 3 \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}};$$

i.e.,

$$H_1(z) = \left(3 \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \right) \left(\frac{z^{-1} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} \right).$$

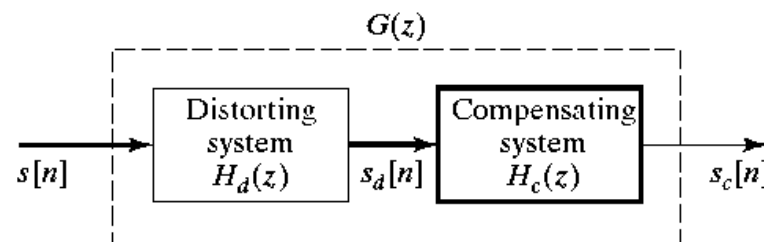
$$H(z) = H_1(z)(z^{-1} - c^*)$$

$$H(z) = H_1(z)(1 - cz^{-1}) \underbrace{\frac{z^{-1} - c^*}{1 - cz^{-1}}}_{\text{All-Pass}}$$

Minimum Phase **All-Pass**

- Αντιστάθμιση (compensation) της απόκρισης συχνότητας

- Αφαίρεση αλλοίωσης
- Όταν το σύστημα $H_d(z)$ δεν είναι αντιστρέψιμο;



- Χρησιμοποιούμε σύστημα ελάχιστης φάσης
 - Αποκατάσταση του πλάτους
 - Φάση αλλοιωμένη κατά το αντίστοιχο σύστημα διέλευσης

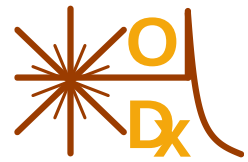
$$H_c(z) = \frac{1}{H_d(z)}$$

$$s_c[n] = s[n],$$

$$H_d(z) = H_{d\min}(z)H_{ap}(z),$$

$$H_c(z) = \frac{1}{H_{d\min}(z)}$$

$$G(z) = H_d(z)H_c(z) = H_{ap}(z)$$



- **Ιδιότητες Συστημάτων Ελάχιστης Φάσης (Minimum Phase System)**

$$H(z) = H_{\min}(z)H_{\text{ap}}(z)$$

- Ελάχιστη υστέρηση φάσης (minimum phase lag)
 - Προσθήκη $H_{\text{ap}} \rightarrow$ πρόσθετη αρνητική φάση $0 \leq \omega \leq \pi$

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg[H_{\min}(e^{j\omega})] + \arg[H_{\text{ap}}(e^{j\omega})].$$

- Ελάχιστη ομαδική καθυστέρηση (minimum group delay)
 - Προσθήκη $H_{\text{ap}} \rightarrow$ πρόσθετη θετικής (πάντα) GD

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \text{grd}[H_{\min}(e^{j\omega})] + \text{grd}[H_{\text{ap}}(e^{j\omega})].$$

- Ελάχιστη καθυστέρηση ενέργειας (minimum energy delay)

- Γραμμικά συστήματα με γενική γραμμική φάση (generalized linear phase)
 - Γραμμική φάση $\rightarrow$ απλή μετατόπιση στο χρόνο
 - Ιδανικό βαθυπερατό (lowpass) φίλτρο με γραμμική φάση

$$H_{id}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\alpha}, \quad |\omega| < \pi,$$

$$|H_{id}(e^{j\omega})| = 1,$$

$$\angle H_{id}(e^{j\omega}) = -\omega\alpha,$$

$$\text{grd}[H_{id}(e^{j\omega})] = \alpha.$$

$$h_{id}[n] = \frac{\sin \pi(n - \alpha)}{\pi(n - \alpha)}, \quad -\infty < n < \infty.$$

$$y[n] = x[n] * \frac{\sin \pi(n - \alpha)}{\pi(n - \alpha)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \frac{\sin \pi(n - k - \alpha)}{\pi(n - k - \alpha)}$$

$$\alpha = n_d,$$

$$h_{id}[n] = \delta[n - n_d]$$

$$y[n] = x[n] * \delta[n - n_d] = x[n - n_d].$$

- Γενική γραμμική φάση
 - α και β σταθερές
 - $A(e^{j\omega})$ πραγματικό

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega + j\beta}$$

$$\tau(\omega) = \text{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega} \{\arg[H(e^{j\omega})]\} = \alpha$$

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \beta - \omega\alpha, \quad 0 < \omega < \pi.$$

- Γραμμικά συστήματα με γενική γραμμική φάση (generalized linear phase)

- Αιτιατά Συστήματα

$$h[n] = 0, \quad n < 0$$

$$h[n] = \begin{cases} h[M-n], & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

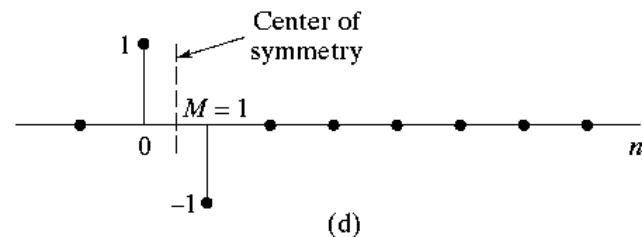
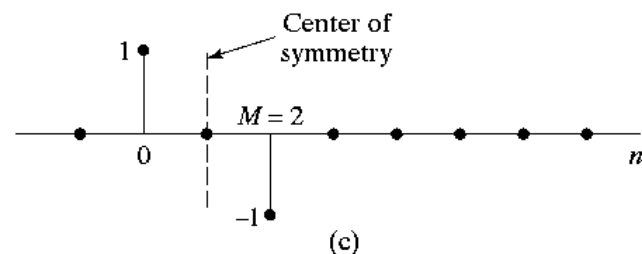
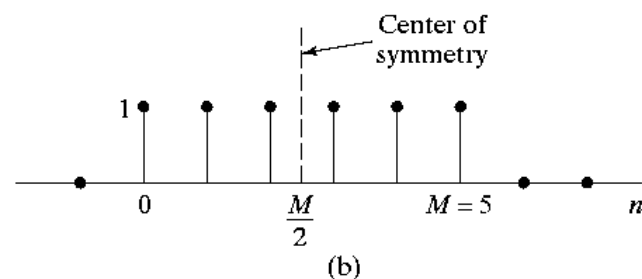
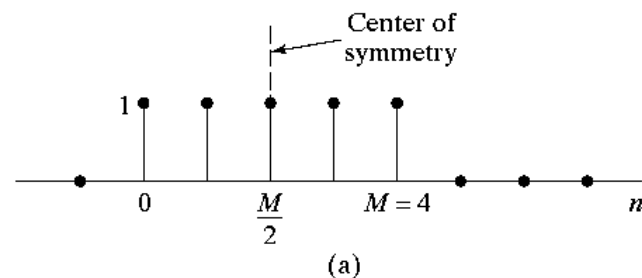
$$H(e^{j\omega}) = A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}$$

$A_e(e^{j\omega})$ is a real, even, periodic function of ω .

$$h[n] = \begin{cases} -h[M-n], & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$H(e^{j\omega}) = j A_o(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2} = A_o(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2 + j\pi/2}$$

$A_o(e^{j\omega})$ is a real, odd, periodic function of ω .



- Γραμμικά συστήματα με γενική γραμμική φάση (generalized linear phase)

- Type I FIR Linear-Phase Systems

- $h[n] = h[M-n]$ (symmetric)
- M even, $M/2$ integer

Example 5.17 Type I Linear-Phase System

If the impulse response is

$$h[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

as shown in Figure 5.36(a), the system satisfies the condition of Eq. (5.148). The frequency response is

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^4 e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega 5}}{1 - e^{-j\omega}} \\ &= e^{-j\omega 2} \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}. \end{aligned} \quad (5.156)$$

The magnitude, phase, and group delay of the system are shown in Figure 5.37. Since $M = 4$ is even, the group delay is an integer, i.e., $\alpha = 2$.

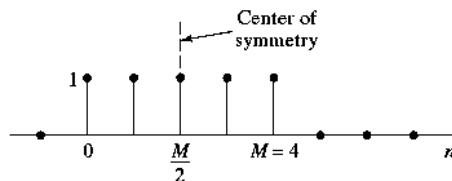
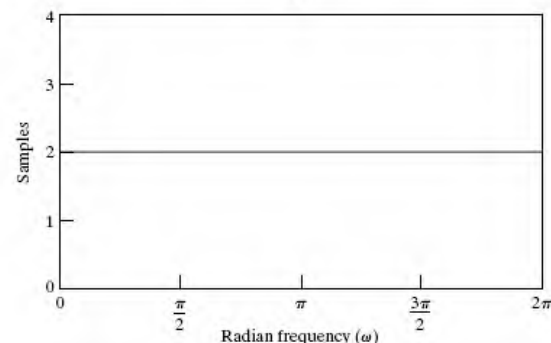
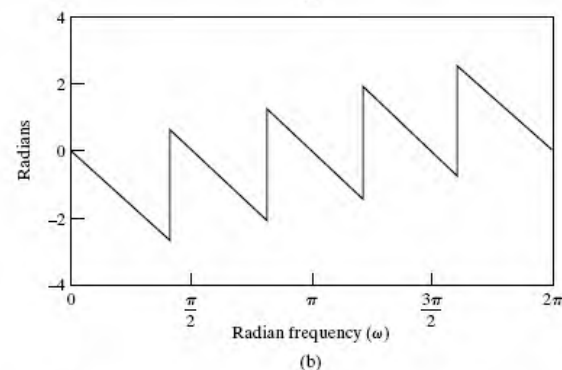
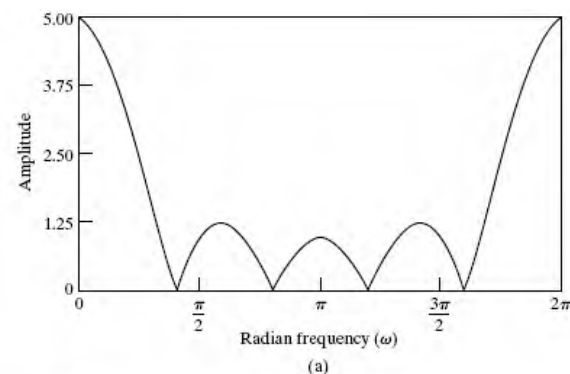


Figure 5.37 Frequency response of type I system of Example 5.17. (a) Magnitude. (b) Phase. (c) Group delay.



- Γραμμικά συστήματα με γενική γραμμική φάση (generalized linear phase)

- Type II FIR Linear-Phase Systems

- $h[n] = h[M-n]$ (symmetric)
- M odd, $M/2$ not an integer

Example 5.18 Type II Linear-Phase System

If the length of the impulse response of the previous example is extended by one sample, we obtain the impulse response of Figure 5.36(b), which has frequency response

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega 5/2} \frac{\sin(3\omega)}{\sin(\omega/2)}. \quad (5.157)$$

The frequency-response functions for this system are shown in Figure 5.38. Note that the group delay in this case is constant with $\alpha = 5/2$.

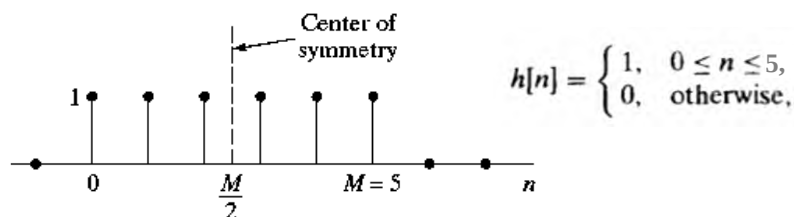
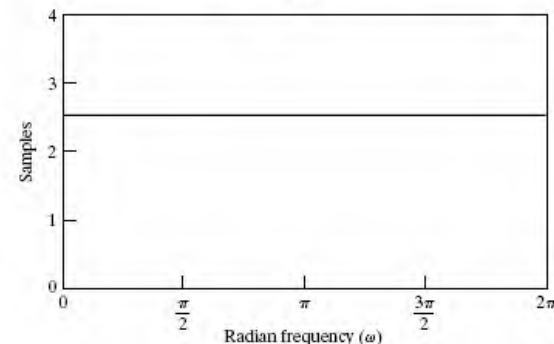
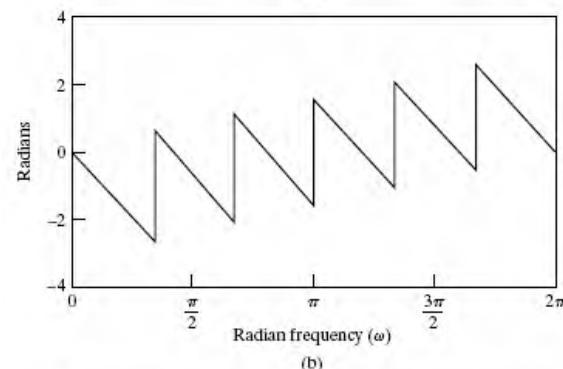
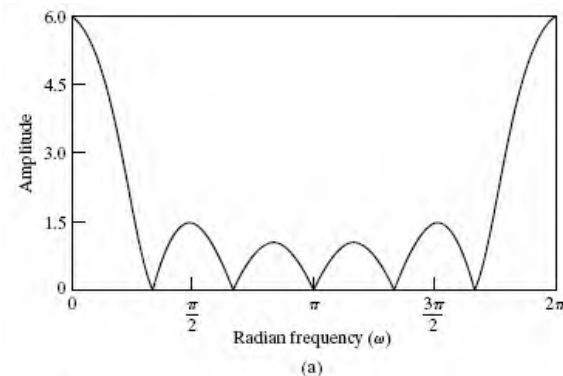


Figure 5.38 Frequency response of type II system of Example 5.18. (a) Magnitude. (b) Phase. (c) Group delay.



- Γραμμικά συστήματα με γενική γραμμική φάση (generalized linear phase)
 - Type II FIR Linear-Phase Systems
 - $h[n] = -h[M-n]$, anti-symmetric
 - M even, $M/2$ integer

Example 5.19 Type III Linear-Phase System

If the impulse response is

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n - 2], \quad (5.158)$$

as in Figure 5.36(c), then

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= 1 - e^{-j2\omega} \\ &= j[2 \sin(\omega)]e^{-j\omega}. \end{aligned} \quad (5.159)$$

The frequency-response plots for this example are given in Figure 5.39. Note that the group delay in this case is constant with $\alpha = 1$.

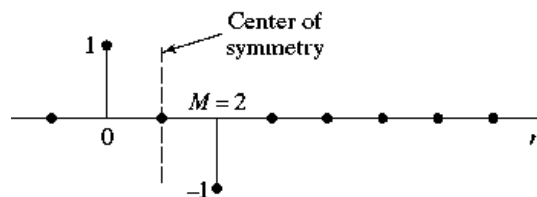
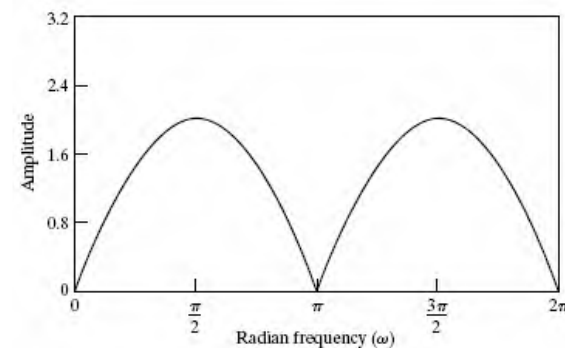
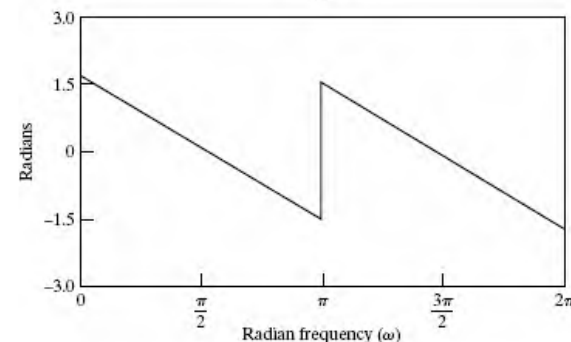


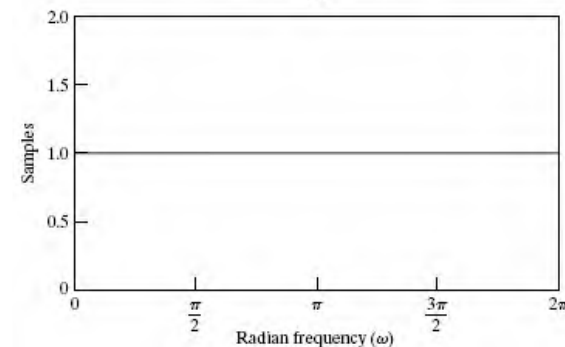
Figure 5.39 Frequency response of type III system of Example 5.19. (a) Magnitude. (b) Phase. (c) Group delay.



(a)



(b)



- Γραμμικά συστήματα με γενική γραμμική φάση (generalized linear phase)

- Type IV FIR Linear-Phase Systems

- $h[n] = -h[M-n]$, anti-symmetric
- M odd, $M/2$ not an integer

Example 5.20 Type IV Linear-Phase System

In this case (Figure 5.36(d)), the impulse response is

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1], \quad (5.160)$$

for which the frequency response is

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= 1 - e^{-j\omega} \\ &= j[2 \sin(\omega/2)]e^{-j\omega/2}. \end{aligned} \quad (5.161)$$

The frequency response for this system is shown in Figure 5.40. Note that the group delay is equal to $\frac{1}{2}$ for all ω .

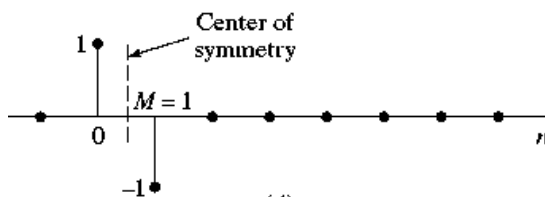


Figure 5.40 Frequency response of type IV system of Example 5.20. (a) Magnitude. (b) Phase. (c) Group delay.

